VEKTÖRLER

DOĞRU PARÇASI:

Doğrunun A ve B noktaları ile bunların arasında kalan bütün noktalarından oluşan kümeye [AB] DOĞRU PARÇASI denir.

Doğrultusu (üzerinde bulunduğu doğru) ve uzunluğundan söz edilebilir.

[AB]=[BA]

|AB|=|CD| ise; [AB]≅[CD] dir.

YÖNLÜ DOĞRU PARÇASI:

Yönlendirilmiş doğru parçasıdır.
[AB] de A başlangıç noktası, B bitim noktası seçilirse
$\overrightarrow{AB}$ yönlü doğru parçası belirtilmiş olur.

Doğrultusu, uzunluğu ve yönünden söz edilebilir.

$\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$

EŞ YÖNLÜ DOĞRU PARÇALARI:

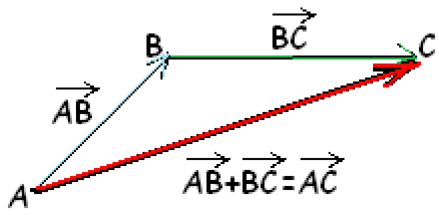
Doğrultuları aynı (veya paralel), uzunlukları eşit ve yönleri aynı olan yönlü doğru parçalarına Eş Yönlü Doğru Parçaları denir.

SIFIR YÖNLÜ DOĞRU PARÇASI:

Başlangıç ve bitim noktası aynı olan yönlü doğru parçalarına Sıfır Yönlü Doğru Parçası denir.
$\vec{0}$ biçiminde gösterilir.

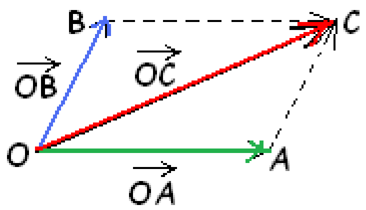
TOPLAMA:

Birinin bitim noktası, diğerinin başlangıç noktası olan iki yönlü doğru parçasının toplamı; birincinin başlangıç noktasını başlangıç noktası, ikincinin bitim noktasını bitim noktası kabul eden yönlü doğru parçasıdır.



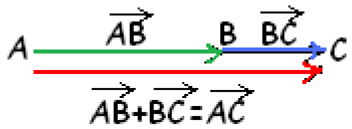
$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}| \leq |\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{BC}|$

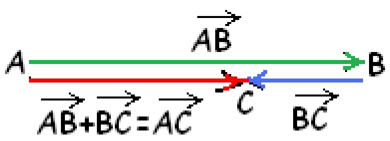
Başlangıç noktaları aynı olan iki yönlü doğru parçasının toplamı;
bu yönlü doğru parçalarını kenar kabul eden paralelkenarın başlangıç noktasından geçen köşegenidir.
Başlangıç noktası ortak başlangıç noktası, bitim noktası karşı köşedir.

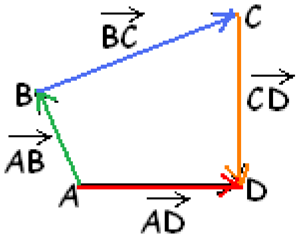


$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$

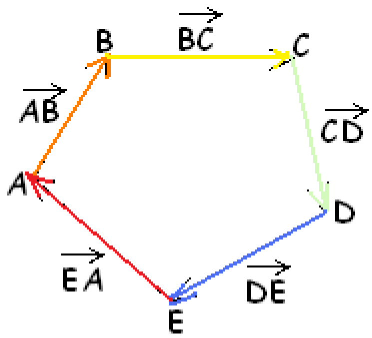
$\overrightarrow{BC} \equiv \overrightarrow{OA}$ ve $\overrightarrow{AC} \equiv \overrightarrow{OB}$ olduğundan;
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB} \equiv \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC} \equiv \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC} \equiv \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}$





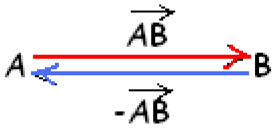


$\overrightarrow{AD} \equiv \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} \equiv \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) \equiv (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD}$

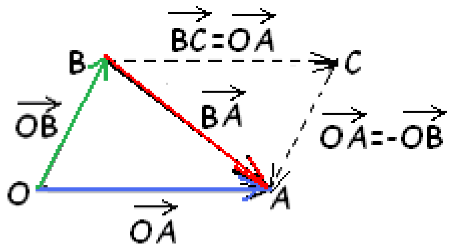


$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA} \equiv \overrightarrow{AA} \equiv \vec{0}$

- $\overrightarrow{AB} + \vec{0} \equiv \overrightarrow{AB}$ $\qquad$ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} \equiv \vec{0}$
- Toplama işlemine göre BİRİM ELEMAN $\vec{0}$ dır.
- $\overrightarrow{AB}$ nin + işlemine göre TERSİ $-\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{BA}$ dır.

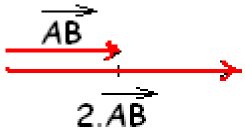


ÇIKARMA:

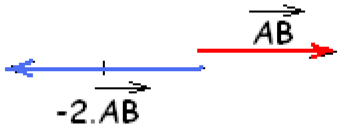


$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} \equiv \overrightarrow{BA}$

- $k \in R$ için; $k > 0$ ise $k.\overrightarrow{AB}$ ile $\overrightarrow{AB}$ aynı yönlüdür.



- $k < 0$ ise $k.\overrightarrow{AB}$ ile $\overrightarrow{AB}$ ters yönlüdür.



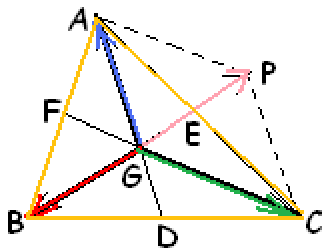
- $(k+p)\overrightarrow{AB} = k.\overrightarrow{AB} + p.\overrightarrow{AB}$

- $k(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = k.\overrightarrow{OA} + k.\overrightarrow{OB}$

ÖRNEK:

ABC üçgeninde, G kenarortayların kesim noktası ise;
$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} \equiv \vec{0}$ dır.

ÇÖZÜM:



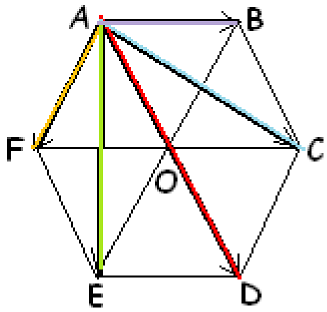
$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} \equiv \overrightarrow{GP}$ $\overrightarrow{GP} \equiv -\overrightarrow{GB}$ olduğundan;

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} \equiv \overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GB} \equiv -\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \equiv \vec{0}$

ÖRNEK:

ABCDEF , merkezi O olan bir düzgün altıgen ise;
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}\equiv 6.\overrightarrow{AO}$ dur.

ÇÖZÜM:



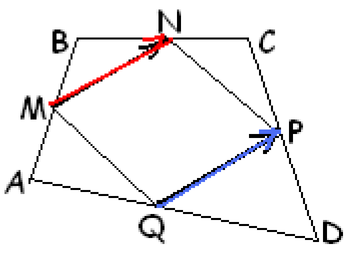
$\overrightarrow{AC}\equiv\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AO}$
$\overrightarrow{AE}\equiv\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AO}$
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}\equiv\overrightarrow{AO}$
$\overrightarrow{AD}\equiv 2.\overrightarrow{AO}$ denklikleri kullanılırsa;

$$\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AO})+2.\overrightarrow{AO}+(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AO})+\overrightarrow{AF}$$
$$\equiv 2(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF})+4.\overrightarrow{AO}\equiv 2.\overrightarrow{AO}+4.\overrightarrow{AO}\equiv 6.\overrightarrow{AO}$$

ÖRNEK:

M, N, P, Q noktaları ABCD dörtgeninde kenarların orta noktaları ise; MNPQ bir paralelkenardır.

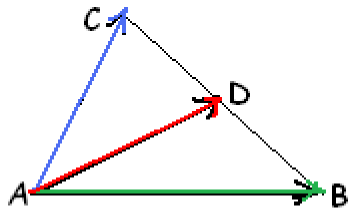
ÇÖZÜM:



$$\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}=(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BN})+(\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DQ})$$
$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA})$$
$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AA}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{PQ}$$

$\Rightarrow$ MNPQ paralelkenardır.

ÖRNEK:



D, [BC] nin orta noktası ise; $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2.\overrightarrow{AD}$ dir.

ÇÖZÜM:

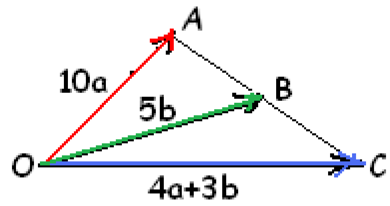
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$ eşitlikleri toplanırsa;

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{DC}=-\overrightarrow{DB}$ olduğundan $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2.\overrightarrow{AD}$ bulunur.

ÖRNEK:



$\overrightarrow{OA}=10a$, $\overrightarrow{OB}=5b$, $\overrightarrow{OC}=4a+3b$

iken A, B, C nin doğrusal olduğunu göster

ve $\dfrac{|AB|}{|BC|}$ oranını bulunuz.

ÇÖZÜM:

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=-10a+5b=5(b-2a)$

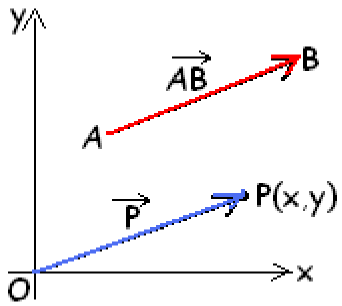
$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}=-5b+4a+3b=-2(b-2a)$

$\overrightarrow{BC}=-\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB}\Rightarrow AB\,//\,BC\Rightarrow$ A,B,C doğrusaldır.

$\dfrac{|AB|}{|BC|}=\dfrac{5}{2}$ dir.

VEKTÖR:

Yönlü doğru parçaları arasında tanımlanan eşlik bağıntısının oluşturduğu denklik sınıflarından her birine VEKTÖR denir.



$\overrightarrow{OP} \equiv \overrightarrow{AB}$ olacak şekilde seçilen
$\overrightarrow{OP}$ vektörüne $\overrightarrow{AB}$ vektörünün KONUM (YER) VEKTÖRÜ denir.

- P(x_1, y_1) ise $\overrightarrow{OP} = \vec{P} = [x_1, y_1] = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$

- $|\vec{P}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

- A(x_1, y_1) ve B(x_2, y_2) iken;
$\overrightarrow{AB}$ nin konum vektörü [x_2-x_1, y_2-y_1] dir.

- $\vec{A} = [x_1, y_1]$ ve $\vec{B} = [x_2, y_2]$ iken;
$\vec{A} + \vec{B} = [x_1, y_1] + [x_2, y_2] = [x_1 + x_2, y_1 + y_2]$

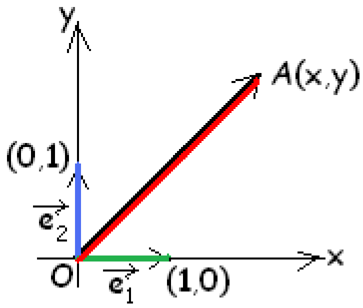
- $\vec{A} = [x, y]$ ve $k \in R$ ise; $k\vec{A} = k[x, y] = [kx, ky]$

- Sıfırdan farklı $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörleri için;
$\vec{A} // \vec{B} \Leftrightarrow \vec{A} = k\vec{B}$ olacak biçimde $k \neq 0$ sayısı vardır.

($\vec{A} = [x_1, y_1]$ ve $\vec{B} = [x_2, y_2]$ için; $\vec{A} // \vec{B} \Leftrightarrow \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2} = k$)

BİRİM VEKTÖR:

Uzunluğu 1 birim olan vektördür.



- $\vec{A}$=[x,y] için; $\vec{A}$=x$\vec{e}_1$ +y$\vec{e}_2$ biçiminde yazılabilir.

- $\vec{A}$ vektörü doğrultusundaki birim vektör ;

$\dfrac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \dfrac{x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2}{\sqrt{x^2+y^2}}$ dir.

- $k_1, k_2, \ldots, k_n$ gerçel sayılar ,

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ vektörler olmak üzere;

$k_1 \vec{a}_1 + k_2 \vec{a}_2 + \ldots + k_n \vec{a}_n = 0$ eşitliği ancak

$k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0$ için sağlanıyorsa $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ vektörleri

LİNEER BAĞIMSIZDIR denir. ($\Delta \neq 0$ dır.)

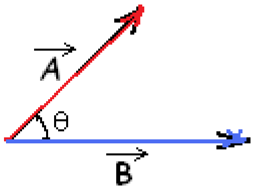
- $k_1 \vec{e}_1 + k_2 \vec{e}_2$ = k_1 [1,0] + k_2 [0,1] =[k_1,0] + [0,k_2] = [k_1,k_2]

  = [0,0] $\Rightarrow$ $k_1 = k_2 = 0$ $\Rightarrow \vec{e}_1, \vec{e}_2$ lineer bağımsızdır.

(R^2 yi gerer.)

- Düzlemde herhangi üç vektör lineer bağımlı, iki vektör (doğrusal değilse) lineer bağımsızdır.

SKALER (İÇ) ÇARPIM:



$0^{\circ} \leq \theta \leq 180^{\circ}$

$$\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$$

$$\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$$

$$\vec{A}.\vec{A} = |\vec{A}||\vec{A}|\cos 0^{0} = |\vec{A}|^{2}$$

$\vec{A}.\vec{B} = 0 \Leftrightarrow \vec{A} \perp \vec{B}$ ($\vec{A} \neq 0$ ve $\vec{B} \neq 0$)

- $\vec{A} = [x_1, y_1]$ ve $\vec{B} = [x_2, y_2]$ için; $\vec{A}.\vec{B} = x_1 x_2 + y_1 y_2$ dir.

- $k, p \in R$ için;

$$\left(k\vec{A}\right)\left(p\vec{B}\right) = kp\left(\vec{A}.\vec{B}\right)$$
$$\vec{A}\left(\vec{B}+\vec{C}\right) = \vec{A}.\vec{B} + \vec{A}.\vec{C}$$
$$\left(\vec{A}+\vec{B}\right)\vec{C} = \vec{A}.\vec{C} + \vec{B}.\vec{C}$$
$$\left|\vec{A}+\vec{B}\right|^{2} = |\vec{A}|^{2} + 2\vec{A}.\vec{B} + |\vec{B}|^{2}$$

- $\cos\theta = \dfrac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}$

($\cos\theta \leq 1$ olduğundan $|\vec{A}.\vec{B}| \leq |\vec{A}||\vec{B}|$ dir.)

- $\vec{A}$ nın $\vec{B}$ üzerindeki dik izdüşümü; $\vec{A_1} = \left(\dfrac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{B}|^{2}}\right)\vec{B}$ dir.

- $\vec{A}$ nın $\vec{B}$ ye göre yansımış görüntüsü;

$$\vec{A_2} = 2\left(\dfrac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{B}|^{2}}\right)\vec{B} - \vec{A}$$ dır.

- $\vec{V}=\left|\vec{B}\right|.\vec{A}+\left|\vec{A}\right|.\vec{B}$ vektörü,

$\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerinin oluşturduğu açının açıortay vektörüdür.

- ax+by+c=0 doğrusuna dik olan vektör $\vec{A}=[a,b]$ dir

ALIŞTIRMALAR:

1) $\vec{A}=[7,-1]$, $\vec{B}=[13,2]$, $\vec{C}=[4,5]$ iken
$\vec{A}+\vec{B}+\vec{X}=3\vec{C}-\vec{X}$ eşitliğini sağlayan
$\vec{X}$ vektörünü bulunuz.

2) [-3,5]=x[1,1]+y[1,2] eşitliğini
sağlayan x ve y sayılarını bulunuz.

3) $\vec{A}=\vec{e_1}+\sqrt{3}\vec{e_2}$ ve $\vec{B}=\vec{e_1}-\vec{e_2}$
vektörlerinin belirttikleri açının ölçüsü kaç derecedir?

4) $\vec{A}=3\vec{e_1}+\vec{e_2}$ ve $\vec{B}=-2\vec{e_1}+k\vec{e_2}$ vektörlerinin ;
a) Dik olması için,
b) Paralel olması için k ne olmalıdır?

5) $\vec{A}=[3,2]$ vektörünün $\vec{B}=[5,-1]$ vektörü üzerindeki
dik izdüşümünü ve yansımış görüntüsünü bulunuz.

6) $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerinin oluşturdukları açının ölçüsü $\frac{2\pi}{3}$,
$\left|\vec{A}\right|=3$ ve $\left|\vec{B}\right|=4$ ise ;
$\left|3\vec{A}+2\vec{B}\right|^2$
$\left(3\vec{A}-2\vec{B}\right)\left(\vec{A}+2\vec{B}\right)$
$\vec{A}.\vec{B}$
$\left|\vec{A}-\vec{B}\right|$ ifadelerini hesaplayınız.

7) $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ birim vektörler, $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}=0$ ise ;
$\vec{A}.\vec{B}+\vec{B}.\vec{C}+\vec{C}.\vec{A}$ ifadesini hesaplayınız.

8) $\vec{A}=[-4,1]$ vektörü ile $\frac{\pi}{4}$ radyanlık açı yapan iki birim vektörü bulunuz.

9) $\vec{A}=[1,k]$ ve $\vec{B}=[-1,1]$ vektörlerinin oluşturduğu açının ölçüsü $\frac{\pi}{3}$ radyan ise k kaçtır?

10) $|\vec{A}|=11$, $|\vec{B}|=23$ ve $|\vec{A}-\vec{B}|=30$ ise $|\vec{A}+\vec{B}|$ kaçtır?

11) $|\vec{A}|=5$, $|\vec{B}|=8$, $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerinin oluşturduğu açının ölçüsü $\frac{2\pi}{3}$ radyan ise ;
$|\vec{A}+\vec{B}|$ ve $|\vec{A}-\vec{B}|$ yi hesaplayınız.

12) A(1,3) ve B(2,-1) noktaları için; $\overrightarrow{AB}=[x,y]$ ise x+y=?

13) C noktası, A(2,-1) ve B(-4,3) noktalarını birleştiren [AB] doğru parçasının orta noktası ise;
$\overrightarrow{OC}=[x,y]$ için x.y=?

14) A(1,-1), B(2,0), C(-1,3), D(-2,2) noktaları için ;
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=?$

15) Birinci bölgede, x ekseniyle 30° lik açı yapan birim vektörü yazınız.

16) $\vec{A}=3\vec{e_1}-4\vec{e_2}$ vektörü ile aynı yönlü birim vektörü yazınız.

17) $\vec{A}=\sqrt{3}\vec{e_1}+\vec{e_2}$ vektörünün
x ekseniyle pozitif yönde yaptığı açı kaç derecedir?