ELEKTROSTATİK (III)

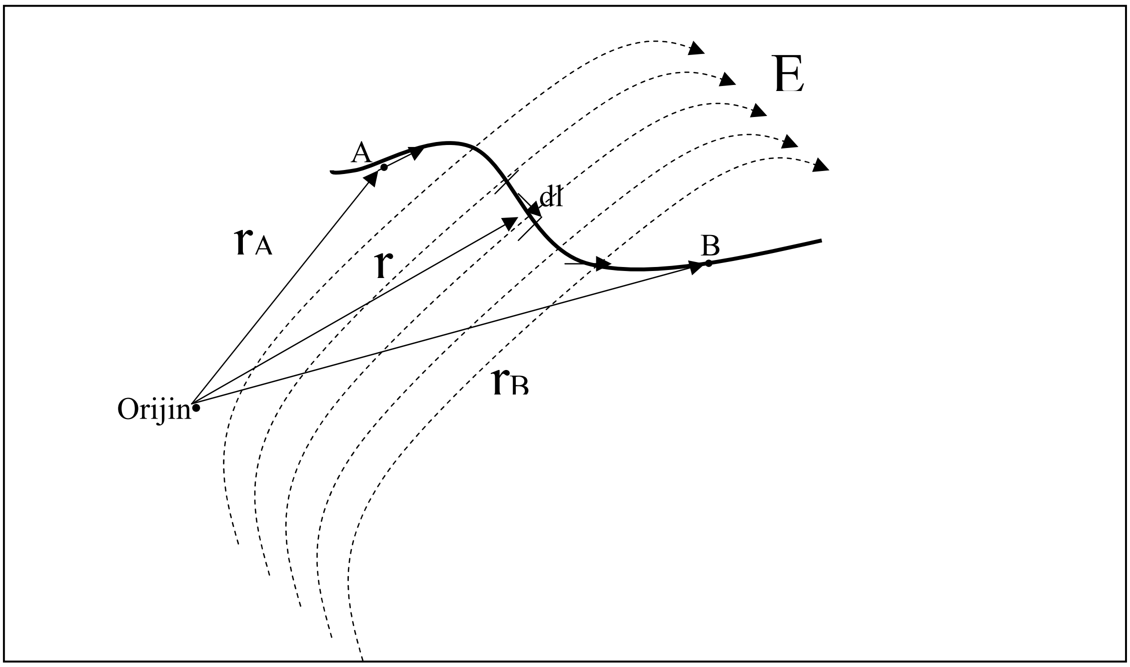
Elektriksel potansiyel

Bundan önceki bölümlerde elektrik alanın Coulomb ve Gauss yasaları kullanılarak nasıl hesap edileceğini inceledik. Elektrik alanı elektrik skaler potansiyel veya kısaca potansiyel kullanarak daha kolay hesap edebiliriz. Bu biçimde elektrik alan hesaplamak daha basittir, çünkü daha önceki bölümlerde elektrik alan vektörler kullanılarak hesap edilmişti, oysa potansiyel skalerdir. Ayrıca potansiyelin türevini almak integral almaktan daha kolaydır. Bu bölümde potansiyelin tanımı yapılıp, bu kavram kullanılarak elektrik alanın nasıl hesap edilebileceği tartışılacaktır.

Bir yükün A noktasından B noktasına taşıyalım. Coulomb yasasına göre kuvvet $\mathrm{F} = Q\mathrm{E}$ ile verilir. Yükün A noktasından B noktasına taşınmasında yapılan iş

$$dW = -\mathrm{F} \cdot d\mathrm{l} = -Q\mathrm{E} \cdot d\mathrm{l} \quad (1)$$

ile hesaplanabilir. Burada eksi işareti elektrik alana karşı bir iş yapıldığı anlamındadır. Bu işi yapabilmek için dışarıdan bir kuvvet uygulanması gerektiği anlamındadır. (1) diferansiyel ifadesinin integrali alınırsa, yükün A noktasından B noktasına taşınmasıyla yapılan toplam iş



Şekil 1. Bir deneme yükün, elektrik alan içerisinde A noktasından B noktasına taşınması.

$$W = -Q\int_A^B \mathrm{E}\cdot d\mathrm{l} \quad (2)$$

olur. (2) denkleminin yüke bölünmesiyle birim yük başına potansiyel enerji hesaplanabilir. Bu V_{AB} ile gösterilir ve A ile B noktaları arasındaki potansiyel farkı olarak bilinir.

$$\frac{W}{Q} = V_{AB} = -\int_A^B \mathrm{E}\cdot d\mathrm{l} \quad (3)$$

Burada A başlangıç noktasını B de bitiş noktasını göstermektedir (Şekil 1).

1. Eğer V_{AB} negatif ise, Q yükünü A noktasından B noktasına taşımakla enerji kaybedilir, bu durumda iş elektrik alan tarafından gerçekleştirilir. Eğer V_{AB} pozitif ise, hareketle potansiyel enerji kazanılır, iş bir dış etmen tarafından gerçekleştirilir.
2. V_{AB} yoldan bağımsızdır.
3. V_{AB} birimi joules/coulomb tur, fakat genellikle volts (V) kullanılır.

Daha önceki derslerden hatırlayalım. Eğer nokta yük orijinde ise, r kadar uzakta elektrik alan

$$\mathrm{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{a}_r \quad (4)$$

ile verilir. (4) ifadesi (3) te yerine yazılırsa

$$V_{AB} = -\int_A^B \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{a}_r \cdot dr\mathrm{a}_\mathrm{r}$$

$$V_{AB} = -\int_{r_A}^{r_B} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{a}_r \cdot dr\mathrm{a}_r$$

$$V_{AB} = V_A - V_B = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a}\right] (5)$$

elde edilir. r_A mesafesi sonsuz alınırsa, sonsuzda potansiyel sıfır olacağından, (5) ifadesi

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_B} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

biçimini alır.

Potansiyelin sonsuzda sıfır olma koşuluyla

$$V = -\int_{\infty}^{r} \mathrm{E} \cdot d\mathrm{l}$$

yazılabilir. Sonuçta yazılan formül yükten r kadar uzaklıktaki potansiyeli sonsuzdaki potansiyelle karşılaştırmış olacaktır. Gerçekte de yükten veya kaynaktan uzaklaştıkça potansiyel azalır ve sonsuzda sıfıra asimptot olur.

Bu durumda herhangi bir noktadaki potansiyel

$$V(\mathrm{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 |\mathrm{r} - \mathrm{r}'|} \quad (6)$$

ile hesaplanır. Burada nokta yük orijinde olmayıp r' yer vektörünün belirttiği konumdadır. (6) bağıntısı birden fazla yük olduğunda aynen Coulomb yasasında olduğu gibi aşağıdaki şekilde

$$V(\mathrm{r}) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 |\mathrm{r} - \mathrm{r}_1|} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 |\mathrm{r} - \mathrm{r}_2|} + \ldots + \frac{Q_n}{4\pi\varepsilon_0 |\mathrm{r} - \mathrm{r}_\mathrm{n}|} \quad (7)$$

$$V(\mathrm{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{k=1}^{n} \frac{Q_k}{|\mathrm{r} - \mathrm{r}_\mathrm{k}|} \quad (8) \text{ (nokta yükler için)}$$

yazılabilir. Potansiyelin üst üste gelebilme (superposition) özelliği vardır. Sürekli yükler içinde

$$V(\mathrm{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_L \frac{\rho_L(\mathrm{r}')\mathrm{d}l'}{|\mathrm{r} - \mathrm{r}'|} \quad \text{(çizgisel yük)}$$

$$V(\mathrm{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\rho_S(\mathrm{r}')\mathrm{d}S'}{|\mathrm{r}-\mathrm{r}'|} \text{ (alansal yük)}$$

$$V(\mathrm{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho_V(\mathrm{r}')\mathrm{d}v'}{|\mathrm{r}-\mathrm{r}'|} \text{ (hacimsel yük)}$$

integral bağıntıları yazılır.

Elektrik alan ve Potansiyel arasındaki ilişki

Şekil 1 e tekrar bakalım. Burada deneme yükün A noktasından B ye taşımakla yapılan iş Vba, daha sonra B noktasından tekrar yükü A noktasına getirirsek iş –Vab, dolayısıyla toplam iş sıfıra eşittir.

$$V_{BA} + V_{AB} = \oint \mathrm{E}\cdot d\mathrm{l} = 0 \quad (8)$$

Bu integral, yükün A noktasından B noktasına sonra B noktasından A noktasına yer değiştirmesi sırasında yapılan işin sıfır olduğunu ifade eder. Çizgi integral yoldan bağımsızdır. Eğer (8) eşitliğine Stokes teoremi uygulanırsa

$$\oint \mathrm{E}\cdot d\mathrm{l} = \int (\nabla\times\mathrm{E})\cdot d\mathrm{S} = 0 \quad (9)$$

$$\nabla\times\mathrm{E} = 0 \quad (10)$$

yazılabilir. (9) ve (10) denklemleri elektrostatik için Maxwell denklemlerinden birisidir. (9) denklemi ve (10) denklemi Maxwell denkleminin sırasıyla integral ve türev biçiminde yazılışıdır. Denklemlerden anlaşılacağı üzere, rotasyon sıfırdır.

İlk yazdığımız potansiyel bağıntısına tekrar bakarsak

$$V = -\int \mathrm{E}\cdot d\mathrm{l}$$

buradan

$$dV = -\mathrm{E}\cdot d\mathrm{l} = -E_x dx - E_y dy - E_z dz \quad (11)$$

yazılabilir. Potansiyelin açık yazılışı

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz \quad (12)$$

biçimindedir. (11) ve (12) bağıntıları birbirlerine eşitlenirse, elektrik alan

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$
$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$
$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

veya kısaca

$$\mathrm{E} = -\nabla V \quad (13)$$

şeklinde gösterilir. (13) bağıntısı yardımıyla elektrik alan hesaplanabilir. Elektrik alan hesaplayabilmek için potansiyel bağıntısını bilmemiz yeterlidir. Bu bağıntıların türevleri alınarak elektrik alan bileşenleri hesap edilebilir.

Örnek:

Aralarında d kadar uzaklık bulunan +q ve –q yükleri şekildeki gibi z ekseni boyunca uzanmaktadır. Bu yük ikilisi dipol olarak bilinir. Dipolün herhangi bir P noktasında oluşturduğu potansiyeli hesaplayınız (Şekil 2).

Çözüm:

N adet yükün oluşturduğu potansiyel

$$V(\mathrm{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{k=1}^{n}\frac{Q_k}{|\mathrm{r}-\mathrm{r_k}|}$$

formülü ile hesaplanabilir. Burada iki adet yük olduğu için

$$V(\mathrm{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{r+} + \frac{(-q)}{r\_}\right]$$

yazılabilir. + ve -- yüklerin P noktasına olan uzaklıkları

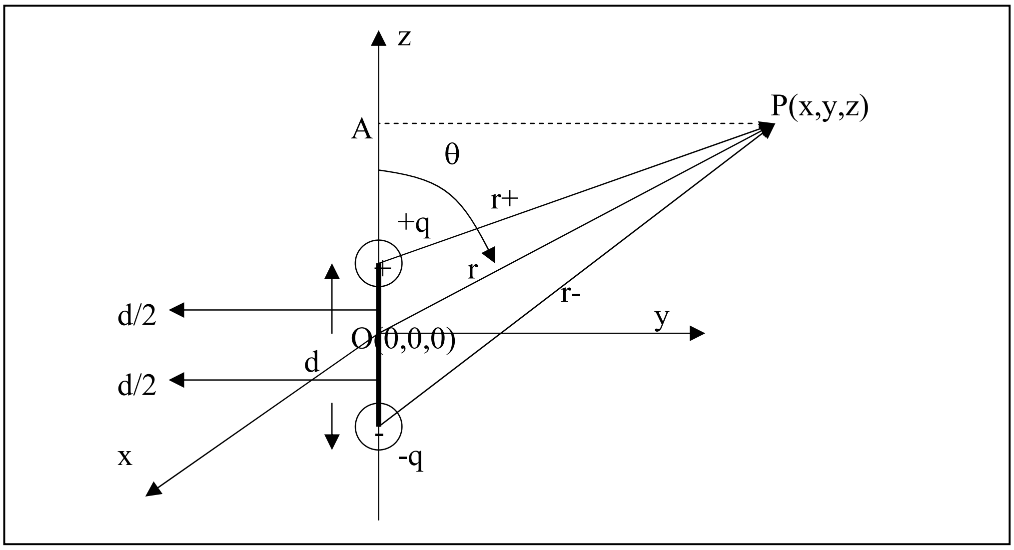
$$r_+ = \sqrt{\left(z-\frac{d}{2}\right)^2 + x^2 + y^2}$$

$$r_- = \sqrt{\left(z + \frac{d}{2}\right)^2 + x^2 + y^2}$$

ile verilir. Noktanın merkeze olan uzaklığı ise

$$r = \sqrt{z^2 + x^2 + y^2}$$

bağıntısıyla hesap edilir.



Şekil 2. Dipol

Bu ifadeleri

$$V(\mathrm{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{r_+} + \frac{(-q)}{r_-}\right]$$

bağıntısında yerine koyalım.

$$V(\mathrm{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{\left(z - \frac{d}{2}\right)^2 + x^2 + y^2}} - \frac{q}{\sqrt{\left(z + \frac{d}{2}\right)^2 + x^2 + y^2}}\right] \quad (14)$$

Elde edilen bağıntıda bazı kısaltmalar yaparak işlemlere devam edelim.

$$\left(z - \frac{d}{2}\right)^2 = \left(z - \frac{d}{2}\right)\left(z - \frac{d}{2}\right) = z^2 - \frac{zd}{2} - \frac{zd}{2} + \frac{d^2}{4} = z^2 - zd + \frac{d^2}{4} \cong z^2 - zd$$

İki yük arasındaki mesafe d, r ye göre çok küçüktür. Dolayısıyla $\frac{d^2}{4}$ ise çok küçük bir sayı olduğu için ihmal edilebilir. Bu durumda

$$r^2 = z^2 + x^2 + y^2 = z^2 - zd + x^2 + y^2 = r^2 - zd = r^2\left(1 - \frac{zd}{r^2}\right) \quad (15)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\left(z - \frac{d}{2}\right)^2 + x^2 + y^2}} \cong \frac{1}{\sqrt{r^2\left(1 - \frac{zd}{r^2}\right)}} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{zd}{r^2}\right)^{-1/2}$$

olur. Son ifade için Binom açılımı uygulanabilir.

Binom açılımı:

$$\boxed{(1 \pm x)^{-m} = 1 \mp mx + \frac{m(m+1)}{2!}x^2 \mp \frac{m(m+1)(m+2)}{3!}x^3 + \ldots}$$

Binom açılımında ilk iki terimi dikkate alırsak

$$\left(1 - \frac{zd}{r^2}\right)^{-1/2} \cong 1 + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{zd}{r^2}\right) = 1 + \frac{1}{2}\frac{zd}{r^2} \quad (16)$$

elde edilir. Benzer şekilde işlemler – yük içinde aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\left(z + \frac{d}{2}\right)^2 = \left(z + \frac{d}{2}\right)\left(z + \frac{d}{2}\right) = z^2 + \frac{zd}{2} + \frac{zd}{2} + \frac{d^2}{4} = z^2 + zd + \frac{d^2}{4} \cong z^2 + zd$$

$$r^2 = z^2 + x^2 + y^2 = z^2 + zd + x^2 + y^2 = r^2 + zd = r^2\left(1 + \frac{zd}{r^2}\right)$$

$$\left(1 + \frac{zd}{r^2}\right)^{-1/2} \cong 1 - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{zd}{r^2}\right) = 1 - \frac{1}{2}\frac{zd}{r^2} \quad (17)$$

+ ve – yükler için bu düzenlemeler yapıldıktan sonra, (16) ve (17) bağıntıları, (14) denkleminde yerine yazılarak potansiyel bağıntısı

$$V(\mathrm{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\left(1+\frac{1}{2}\frac{zd}{r^2}\right) - \frac{1}{r}\left(1-\frac{1}{2}\frac{zd}{r^2}\right)\right]$$

$$V(\mathrm{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\left[1+\frac{1}{2}\frac{zd}{r^2} - 1 + \frac{1}{2}\frac{zd}{r^2}\right]$$

$$V(\mathrm{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\left[1+\frac{1}{2}\frac{zd}{r^2} - 1 + \frac{1}{2}\frac{zd}{r^2}\right]$$

$$V(\mathrm{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\left[\frac{zd}{r^2}\right]$$

$$V(\mathrm{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{zd}{r^3} \quad (18)$$

şeklinde bulunur. p=qd dipol momenti olmak üzere (18) denklemi

$$V(x,y,z) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{r^3} \quad (19)$$

biçiminde yazılabilir. Ayrıca Şekil 2 deki AOP dik üçgeninden $\cos\theta = \frac{z}{r}$ olduğu kolayca görülebilir. Sonuç olarak (19) potansiyel ifadesi

$$V(x,y,z) = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad (20)$$

olarak bulunur.

Örnek:

Bir önceki örnekte bulduğunuz potansiyel bağıntısını kullanarak elektrik alanı hesaplayınız? $V(x,y,z) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{r^3}$

Çözüm:

Elektrik alanın üç bileşenini $\mathrm{E} = -\nabla V$ ile hesaplanabilir.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$
$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$
$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

İlk önce Ex bileşenini hesap edelim

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z}{r^3}\right) = -\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\right) \quad (21)$$

bu ifadenin türevi alınırken bölümün veya çarpımın türev özellikleri kullanılabilir.

Herhangi bir $\frac{a}{b}$ ifadesinin türevi $\frac{a'b-ab'}{b^2}$ biçimindedir. Şimdi bunu (21) e uygulayalım.

$$E_x = -\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{0\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2} - z\frac{3}{2}2x\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}\right)$$

$$E_x = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3xz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}}$$

$$\boxed{E_x = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3xz}{r^5}} \quad (22)$$

Benzer şekilde elektrik alanın y bileşeni potansiyelin y ye göre türevi alınarak

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{r^3}\right) = -\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\right)$$

$$E_y = -\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{0\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2} - z\frac{3}{2}2y\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}\right)$$

$$E_y = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3yz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}}$$

$$\boxed{E_y = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3yz}{r^5}} \quad (23)$$

bulunur. Son olarak elektrik alanın z bileşeni benzer biçimde

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right) = -\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\right)$$

$$E_z = -\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2} - z\frac{3}{2}2z\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}\right)$$

$$E_z = -\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2} - 3z^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}\right)$$

$$E_z = -\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3} - \frac{3z^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}\right)$$

$$E_z = -\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3-3/2}} - \frac{3z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3-1/2}}\right)$$

$$E_z = -\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} - \frac{3z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}}\right)$$

hesap edilebilir. Son olarak Ez bileşeni

$$\boxed{E_z = -\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5}\right)} \quad (24)$$

şeklinde bulunur. Eğer $\cos\theta = \frac{z}{r}$ ve $\cos^2\theta = \frac{z^2}{r^2}$ eşitliği (24) te yerine konulursa

$$E_z = \frac{p\left(3\cos^2\theta - 1\right)}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

elde edilir. Sonuç olarak elektrik alanın üç bileşeni (22), (23) ve (24) bağıntıları kartezyen koordinatlarda

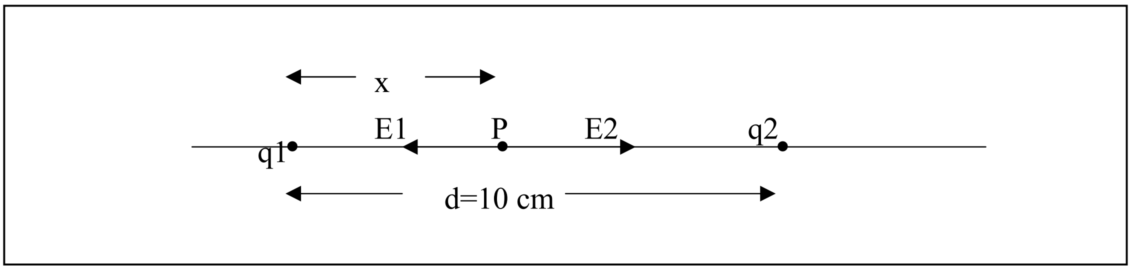
$$\mathrm{E} = E_{\mathrm{x}} a_x + E_{\mathrm{y}} a_y + E_{\mathrm{z}} a_z$$

şeklinde yazılabilir.

Örnek:

Şekilde verilen yükler arasında 10 cm uzaklık vardır. İki yükü birleştiren doğru üzerinde hangi noktada elektrik alan sıfırdır?

$$q_1 = 1.0 \times 10^{-6} C$$
$$q_2 = 2.0 \times 10^{-6} C$$



Şekil 3. İki yük arasında elektrik alanın sıfır noktasının bulunması.

Çözüm:

Elektrik alan

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

formülü ile hesap edilir. İki yük arasında bir P noktası seçelim ve iki yükten oluşan alanı eşitleyelim ve işlemleri aşağıdaki şekilde yapalım.

$$E_1 = E_2$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{x^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_2}{(d-x)^2}$$

$$\frac{q_1}{x^2} = \frac{q_2}{(d-x)^2}$$

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{x^2}{(d-x)^2}$$

$$\sqrt{\frac{q_1}{q_2}} = \frac{x}{(d-x)}$$

$$\sqrt{\frac{1.0\times10^{-6}}{2.0\times10^{-6}}} = \frac{x}{(10-x)}$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{x}{(10-x)}$$

$$10\sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}x = x$$

$$10\sqrt{\frac{1}{2}} = x + \sqrt{\frac{1}{2}}x$$

$$10\sqrt{\frac{1}{2}} = x\left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

ve sonuç olarak x uzaklığı

$$x = \frac{10\sqrt{\frac{1}{2}}}{\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)} = 4.14 \text{ cm}$$

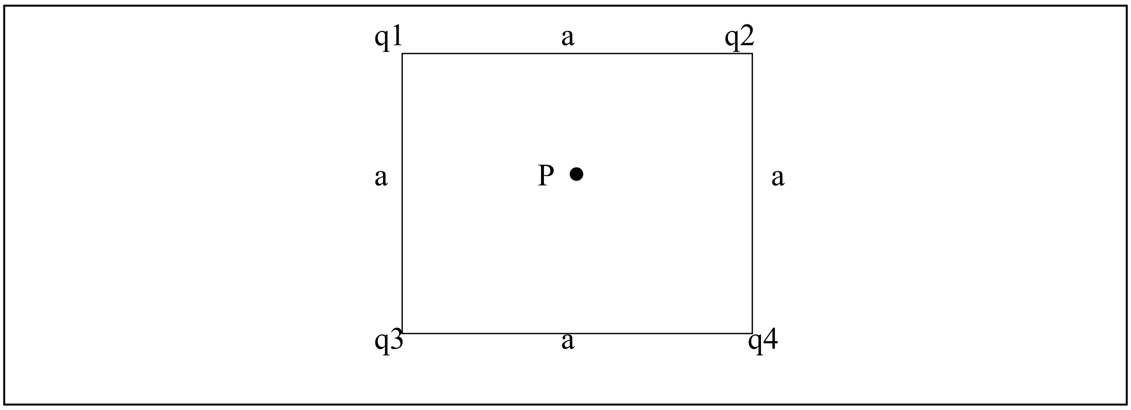
olarak bulunur.

Örnek:

Şekil 4 te verilen karenin merkezinde potansiyeli hesaplayınız?

$q_1 = 1.0\times10^{-8}$ C
$q_2 = -2.0\times10^{-8}$ C
$q_3 = 3.0\times10^{-8}$ C
$q_4 = 2.0\times10^{-8}$ C
a= 1 m

$$\varepsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi} \text{ F/m}$$



Şekil 4. Köşelerinde yük bulunan karenin merkezindeki P noktasında potansiyelin hesaplanması.

Çözüm:

İlk önce yüklerin potansiyeli bulunması gereken noktaya uzaklığını bilmemiz gerekir. Şekil kare olduğu için

$$x^2 = \frac{a^2}{2^2} + \frac{a^2}{2^2}$$

$$x^2 = \frac{2a^2}{4} = \frac{a^2}{2}$$

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0.7071 \text{ m}$$

Bütün yüklerin P noktasına olan uzaklığı eşit olup 0.71 m kadardır. Daha sonra

$$V = \sum_n V_n = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 + q_2 + q_3 + q_4}{r}$$

bağıntısı yardımıyla potansiyel

$$V = \sum_n V_n = \frac{1}{4\pi \dfrac{10^{-9}}{36\pi}} \frac{(1 - 2 + 3 + 2) \times 10^{-8}}{0.7071}$$

$$V = \frac{1}{4\pi \frac{10^{-9}}{36\pi}} \frac{(1-2+3+2)10^{-8}}{0.7071} = 9.0\times 10^{9} \frac{4}{0.7071}\times 10^{-8} = \frac{360}{0.7071} = 509.12 \text{ V}$$

olarak bulunur.

KAYNAKLAR

Edminister, Jeseph A., 1993, Electromagnetics, Schaum’s outlines.

Feynman, R, P, 1977, The Feynman Lectures on Physics mainly Electromagnetism and Matter, Volume II, Addison-Wesley Publishing company.

Sadiku, M. N. O., 1995, Elements of Electromagnetics, Oxford University Press.