VEKTÖR HESAPLAMALARI (grav,del,curl)

Giriş

Vektör hesaplamalarında diferansiyel uzunluk, alan ve hacim elemanları önemlidir. Daha önce matematik derslerinde gördüğümüz türev ve integral işlemleri vektörler içinde uygulanabilir. Bu bölümde bu tip işlemlerle ilgileneceğiz.

Diferansiyel uzunluk, alan ve hacim (kartezyen koordinatlar)

Kartezyen koordinatlarda uzunluk

$$d\mathrm{l} = dx\mathrm{a}_x + dy\mathrm{a}_y + dz\mathrm{a}_z$$

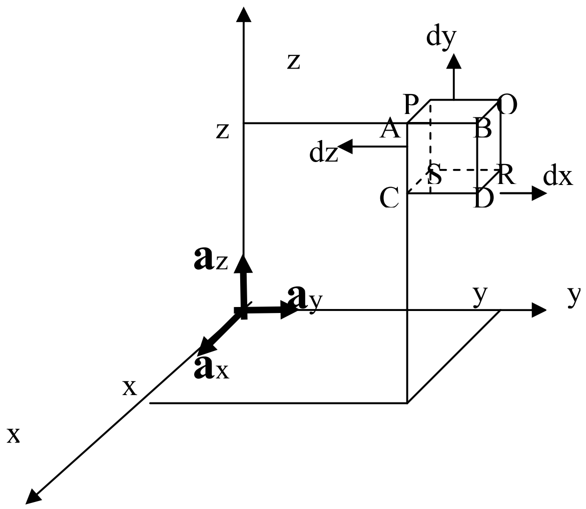
ile verilir. Şekil 1.de kartezyen koordinatlarda diferansiyel uzunluk gösterilmiştir. Diferansiyel alan (Şekil 2.)

$$\begin{aligned} d\mathrm{S} = & \, dydz\mathrm{a}_x \\ & + dxdz\mathrm{a}_y \\ & + dxdy\mathrm{a}_z \end{aligned}$$

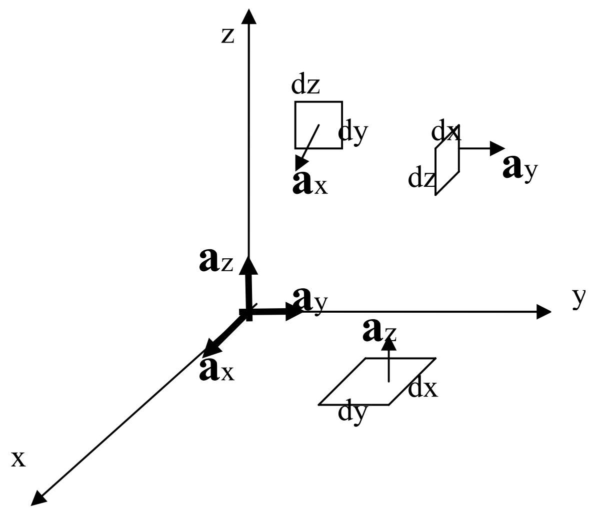
biçiminde gösterilir. Hacim ise

$$dv = dxdydz$$

ile hesaplanır.



Şekil 1. Sağ-el kartezyen koordinat sisteminde diferansiyel elemanlar.



Şekil 2. Kartezyen koordinat sisteminde diferansiyel normal alanlar.

Bu bağıntılardan anlaşılacağı üzere diferansiyel uzunluk ve normal alanlar vektör büyüklüklerdir. Hacim ise skaler bir büyüklüktür. Burada uzunluk, yönlere göre değişmektedir. Daha önce skaler olarak tanımlanan uzunluk biriminden farklıdır. Burada herhangi bir cismin uzunluğu kastedilmemektedir. Buradaki uzunluk vektörel bir alanın çizgisel özelliğidir ve dolayısıyla yönlere göre değişmektedir. Bu bağıntılarda kullanılan dx, dy ve dz yönlere göre diferansiyel uzunluktur.

Diferansiyel uzunluk, alan ve hacim (silindirik koordinatlar)

Silindirik koordinatlarda uzunluk

$$d\mathrm{l} = d\rho \mathrm{a}_\rho + \rho d\phi \mathrm{a}_\phi + dz\mathrm{a}_z$$

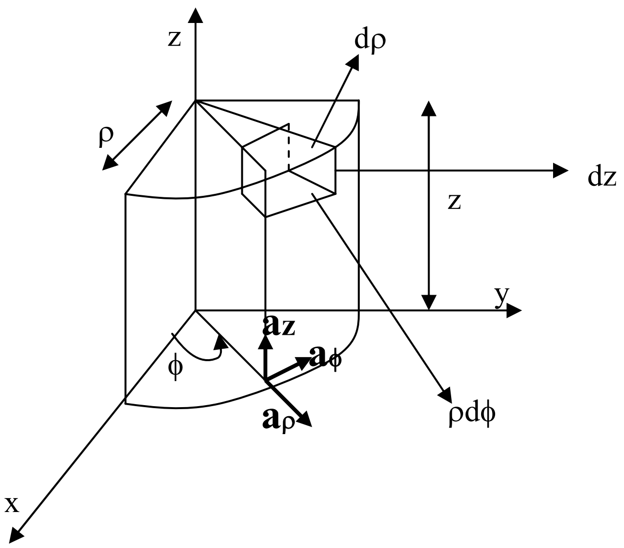
ile verilir. Şekil 3.de silindirk koordinatlarda diferansiyel uzunluk gösterilmiştir.
Diferansiyel alan (Şekil 4.)

$$\begin{aligned} d\mathrm{S} &= \rho d\phi dz \mathrm{a}_\rho \\ &+ d\rho dz \mathrm{a}_\phi \\ &+ \rho d\phi d\rho \mathrm{a}_z \end{aligned}$$

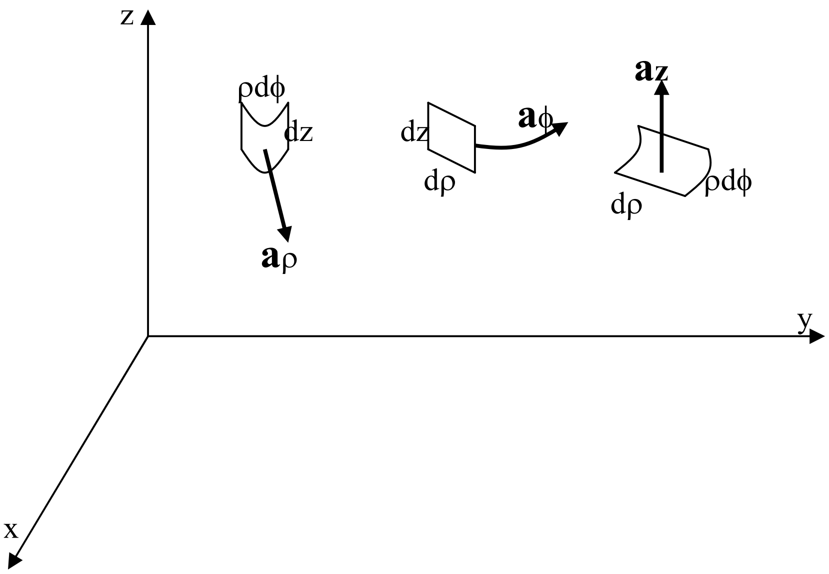
biçiminde gösterilir. Hacim ise

$$dv = \rho d\rho d\phi dz$$

ile hesaplanır.



Şekil 3. Silindirik koordinat sisteminde diferansiyel elemanlar.



Şekil 4. Silindirik koordinat sisteminde diferansiyel normal alanlar.

Diferansiyel uzunluk, alan ve hacim (küresel koordinatlar)

Küresel koordinatlarda uzunluk

$$d\mathrm{l} = dr\mathrm{a}_r + rd\theta\mathrm{a}_\theta + r\sin\theta d\phi\mathrm{a}_\phi$$

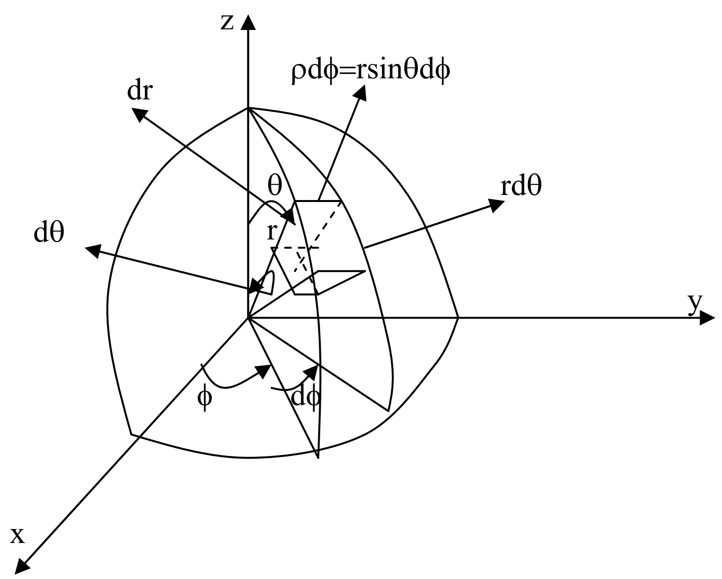
ile verilir. Şekil 3.de silindirik koordinatlarda diferansiyel uzunluk gösterilmiştir. Diferansiyel alan (Şekil 4.)

$$
\begin{aligned}
d\mathrm{S} = r^2 \sin\theta d\theta d\phi \mathrm{a}_r \\
+ r\sin\theta dr d\phi \mathrm{a}_\theta \\
+ r dr d\theta \mathrm{a}_\phi
\end{aligned}
$$

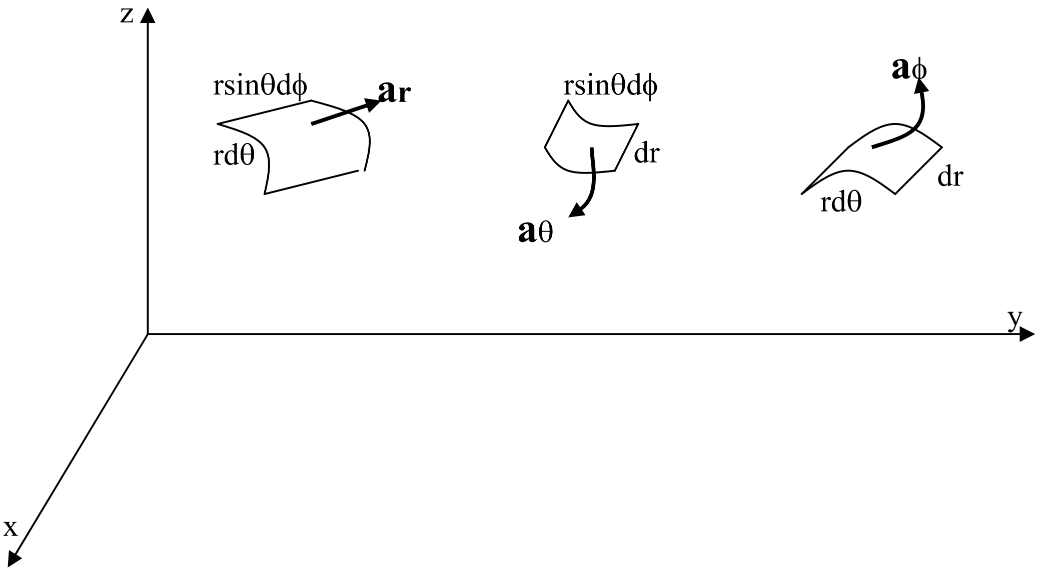
biçiminde gösterilir. Hacim ise

$$dv = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$$

ile hesaplanır.



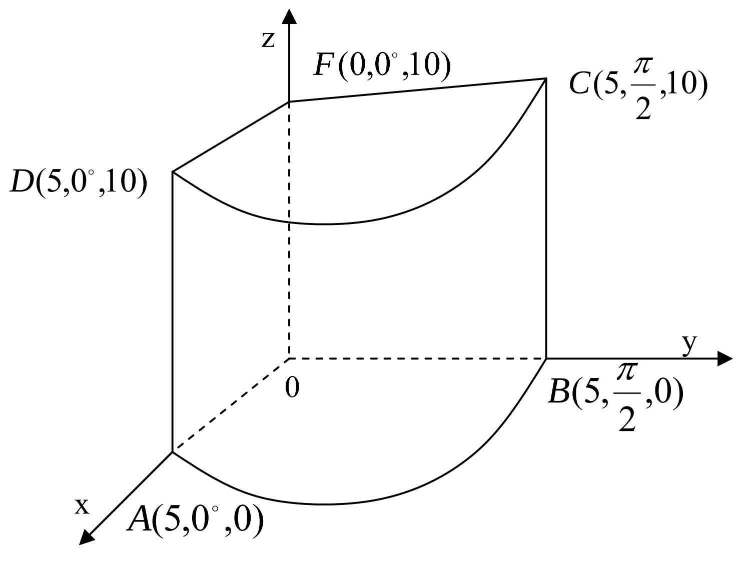
Şekil 5. Küresel koordinat sisteminde diferansiyel elemanlar.



Şekil 6. Küresel koordinat sisteminde diferansiyel normal alanlar

Örnek:

Şekil 7. ye göre aşağıdaki istenilenleri hesaplayınız.



Şekil 7. Silindirik koordinatlarda uzunluk, alan ve hacim hesabı. Nokta koordinatları $A(\rho,\phi,z)$ biçimindedir.

a) BC arasındaki uzaklığı
b) CD arasındaki uzaklığı
c) ABCD alanını
d) ABO alanını
e) AOFD alanını
f) ABDCFO hacmini hesaplayınız.

Cevap:

a) $BC = \int dl = \int_0^{10} dz = z\Big|_0^{10} = 10$

b)Silindirik koordinatlarda (Şekil 4.) $dl = \rho d\phi$ ve $\rho = 5$ böylece

$$CD = \int_0^{\pi/2} \rho d\phi = \rho \int_0^{\pi/2} d\phi = 5\phi\Big|_0^{\pi/2} = 2.5\pi$$

c) ABCD alanını hesaplamak için Şekil 4 ten yararlanabiliriz. ABCD alan elemanı

$dS = \rho d\phi dz$ ile verilmiştir. Bu durumda ABCD nin alanı iki katlı integral alınarak aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$S_{ABCD} = \int dS = \int_{\phi=0}^{\pi/2} \int_{z=0}^{10} \rho d\phi dz = \rho \int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^5 dz = 5(\phi)\Big|_0^{\pi/2} (z)\Big|_0^{10} = 25\pi$$

d) ABO şeklinin alanı için tekrar Şekil 4 ten yararlanabiliriz. $dS = \rho d\phi d\rho$ ile verilmiştir. Bu durumda istenilen alan

$$S_{ABO} = \int_0^{\pi/2}\int_0^5 \rho d\phi d\rho = \int_{\phi=0}^{\pi/2} d\phi \int_{\rho=0}^{5} \rho d\rho = (\phi)\Big|_0^{\pi/2} \left(\frac{\rho^2}{2}\right)\Bigg|_0^5 = \left(\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{25}{2}\right) = 6.25\pi$$

e) AOFD alanı Şekil 7 den basitçe görülebilir. AOFD dikdörtgenin alanını bulmalıyız. Yani $dS = d\rho dz$ nin iki katlı integralini almamız gerekmektedir.

$$S_{AOFD} = \int_{\rho=0}^{5} \int_{z=0}^{10} d\rho dz = (\rho)\Big|_0^5 (z)\Big|_0^{10} = 50$$

f) Silindirik koordinatlarda hacim elemanı $dv = \rho d\phi dz d\rho$ üç katlı integralinin sonucu bize istenilen bölgenin hacmini verir. Bu durumda

$$V_{ABDCFO} = \int dv = \int_{\rho=0}^{5} \int_{\phi=0}^{\pi/2} \int_{z=0}^{10} \rho d\phi dz d\rho = \int_{0}^{10} dz \int_{0}^{\pi/2} d\phi \int_{0}^{5} \rho d\rho = \left(z\right)\Big|_0^{10} \left(\phi\right)\Big|_0^{\pi/2} \left(\frac{\rho^2}{2}\right)\Bigg|_0^{5}$$

$$= 10\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{25}{2}\right) = 62.5\pi$$

ÇİZGİ ve ALAN İNTEGRALLERİ

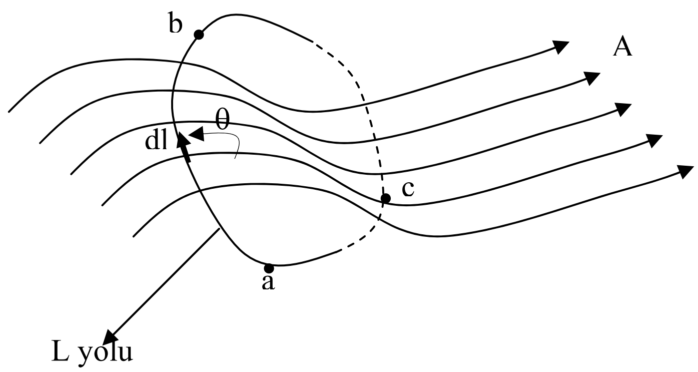
Daha önce bildiğimiz integral hesaplarını vektörlere uygulayalım. Çizgi integrali bir eğri boyunca integralinin alınması esasına dayanmaktadır. Örneğin A gibi bir vektör alanın L yolu boyunca integrali

$$\int_L \mathrm{A} \cdot d\mathrm{l} = \int_a^b |\mathrm{A}| \cos\theta dl$$

ile verilir. Bu ifade A vektör alanını L eğrisi boyunca integralinin alınmasıdır. Eğer L eğrisi kapalı bir alansa bu durumda bu ifadeye A nın L boyunca dolanımı denir. Ve bu durumda integral

$$\oint_L \mathrm{A} \cdot d\mathrm{l} = \oint_L \left(A_x dx + A_y dy + A_z dz\right)$$

ile gösterilir.



Şekil 8. Bir vektör alanın L yolu boyunca çizgisel integrali.

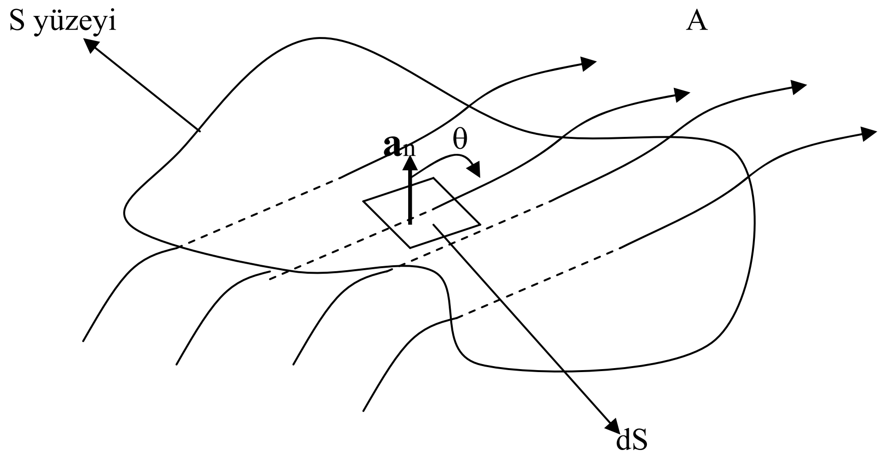
Verilen A vektörü için, sürekli düzgün bir S yüzeyinin alan integrali veya A vektörünün S yüzeyindeki akısı

$$\psi = \int_S |\mathrm{A}| \cos\theta dS = \int_S \mathrm{A} \cdot \mathrm{a}_n dS$$

veya basitçe

$$\psi = \int_S \mathrm{A} \cdot dS \text{ veya } \psi = \oint_S \mathrm{A} \cdot dS$$

şeklinde gösterilir (Şekil 8).



Şekil 9. A vektör alanın S yüzeyi boyunca yüzey integrali veya A vektörünün S yüzeyi boyunca akısı.

DİFERANSİYEL VEKTÖR İŞLEÇLERİ

Del Operatörü ve Gradyent

Del operatörü ∇ ile gösterilen bir diferansiyel vektör işlecidir. Kartezyen koordinatlarda

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{a}_x + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{a}_y + \frac{\partial}{\partial z}\mathrm{a}_z$$

şeklinde yazılır. Del operatörü matematikte çok kullanışlı bir operatördür. Bu derste del işlecini aşağıdaki şekillerde göreceğiz:

1) Skaler bir V fonksiyonun gradyenti ∇V,
2) A vektörünün diverjansı $\nabla \cdot \mathrm{A}$,
3) A vektörünün rotasyonu $\nabla \times \mathrm{A}$,

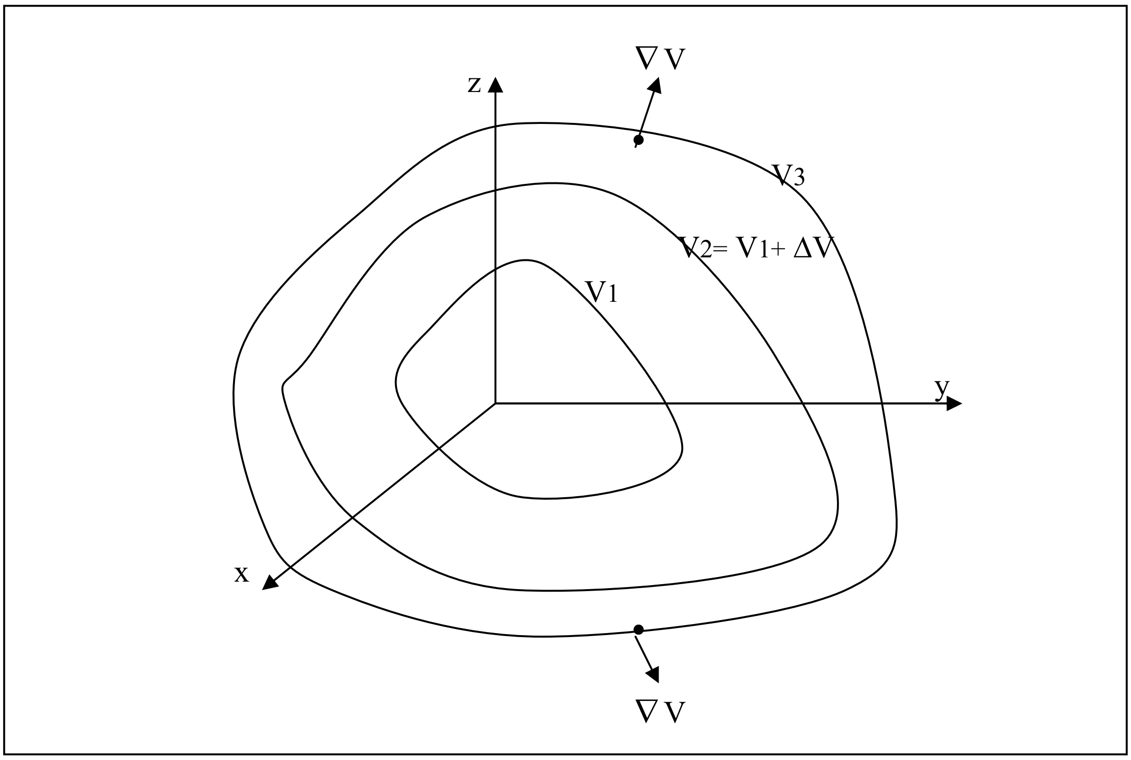
4) Skaler bir V fonksiyonunun Laplasiyeni $\nabla^2 V$.

Bu işlemlere başlamadan önce del işlecini silindirik ve küresel koordinatlarda sırasıyla tanımlayalım.

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial \rho}\mathrm{a}_{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi}\mathrm{a}_{\phi} + \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}\mathrm{a}_{\mathrm{z}}$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r}\mathrm{a}_{\mathrm{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\mathrm{a}_{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\mathrm{a}_{\phi}$$

Bir skaler vektör alanın gradyenti, yani yönlere göre değişimi Şekil 10. da verilmiştir. Şekilde skaler alanın konturlanmış hali verilmiştir. Bazı durumlarda skaler alanın yönlere göre değişimi, yani türevini hesaplamak gereklidir. Bu durumlarda gradyent işlecini kullanırız. Gradyent işleminin sonucu bir vektördür. Del operatörü bir vektör olduğundan skaler bir fonksiyonun bir vektörle çarpımının sonucu yine bir vektördür.



Şekil 10. A vektör alanın S yüzeyi boyunca yüzey integrali veya A vektörünün S yüzeyi boyunca akısı.

Skaler bir fonksiyon için gradyent

$$gradV = \nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathrm{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathrm{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathrm{a}_z$$

ile gösterilir. Burada V(x,y,z) fonksiyonu sürekli bir fonksiyondur. Burada V skaler bir alan, herhangi bir skaler alanın gradyenti vektördür.

Örnek 1: $f(x,y,z) = x^2yz^3$ şeklinde verilen fonksiyon için ∇f i ve (1,-1,2) noktasındaki değerini bulunuz.

Çözüm:

$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{a}_x + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{a}_y + \frac{\partial}{\partial z}\mathrm{a}_z$ ve $f(x,y,z) = x^2yz^3$ fonksiyonlarına ihtiyaç vardır.

$$\nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{a}_x + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{a}_y + \frac{\partial}{\partial z}\mathrm{a}_z\right)x^2yz^3$$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial\left(x^2yz^3\right)}{\partial x}\mathrm{a}_x + \frac{\partial\left(x^2yz^3\right)}{\partial y}\mathrm{a}_y + \frac{\partial x^2yz^3}{\partial z}\mathrm{a}_z\right)$$

$\nabla f = 2xyz^3\mathrm{a}_x + x^2z^3\mathrm{a}_y + 3x^2yz^2\mathrm{a}_z$ olarak bulunur.

Bu ifadenin (1,-1,2) noktasındaki değeri ise

$$\begin{aligned}\nabla f &= 2(1)(-1)\left(2^3\right)\mathrm{a}_x + \left(1^2\right)\left(2^3\right)\mathrm{a}_y + 3\left(1^2\right)(-1)\left(2^2\right)\mathrm{a}_z \\ &= -16\mathrm{a}_x + 8\mathrm{a}_y - 12\mathrm{a}_z\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Örnek 2: Verilen fonksiyonların gradyentlerini hesaplayınız.

a) $V = e^{-z}\sin 2x\cosh y$ (kartezyen koordinatlar)
b) $U = \rho^2 z\cos 2\phi$ (silindirik koordinatlar)
c) $W = 10r\sin^2\theta\cos\phi$ (küresel koordinatlar)

Çözüm:

a) $V = e^{-z}\sin 2x\cosh y$

$$\nabla V = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{a}_x + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{a}_y + \frac{\partial}{\partial z}\mathrm{a}_z\right)e^{-z}\sin 2x\cosh y$$

$$\nabla V = \frac{\partial\left(e^{-z}\sin 2x\cosh y\right)}{\partial x}\mathrm{a}_x + \frac{\partial\left(e^{-z}\sin 2x\cosh y\right)}{\partial y}\mathrm{a}_y + \frac{\partial\left(e^{-z}\sin 2x\cosh y\right)}{\partial z}\mathrm{a}_z$$

$$\nabla V = 2e^{-z}\cos 2x\cosh y\mathrm{a}_x + e^{-z}\sin 2x\sinh y\mathrm{a}_y - e^{-z}\sin 2x\cosh y\mathrm{a}_z$$

b) $U = \rho^2 \mathrm{z}\cos 2\phi$

$$\nabla U = \left(\frac{\partial}{\partial \rho}\mathrm{a}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi}\mathrm{a}_\phi + \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}\mathrm{a}_z\right)\rho^2 \mathrm{z}\cos 2\phi$$

$$\nabla U = \left(\frac{\partial\left(\rho^2 \mathrm{z}\cos 2\phi\right)}{\partial \rho}\mathrm{a}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\rho^2 \mathrm{z}\cos 2\phi\right)}{\partial \phi}\mathrm{a}_\phi + \frac{\partial\left(\rho^2 \mathrm{z}\cos 2\phi\right)}{\partial \mathrm{z}}\mathrm{a}_z\right)$$

$$\nabla U = 2\rho z\cos 2\phi\mathrm{a}_\rho - 2\rho z\sin 2\phi\mathrm{a}_\phi + \rho^2\cos 2\phi\mathrm{a}_z$$

c) $W = 10r\sin^2\theta\cos\phi$

$$\nabla W = \left(\frac{\partial}{\partial r}\mathrm{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\mathrm{a}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\mathrm{a}_\phi\right)10r\sin^2\theta\cos\phi$$

$$\nabla W = \left(\frac{\partial\left(10r\sin^2\theta\cos\phi\right)}{\partial r}\mathrm{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\left(10r\sin^2\theta\cos\phi\right)}{\partial \theta}\mathrm{a}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(10r\sin^2\theta\cos\phi\right)}{\partial \phi}\mathrm{a}_\phi\right)$$

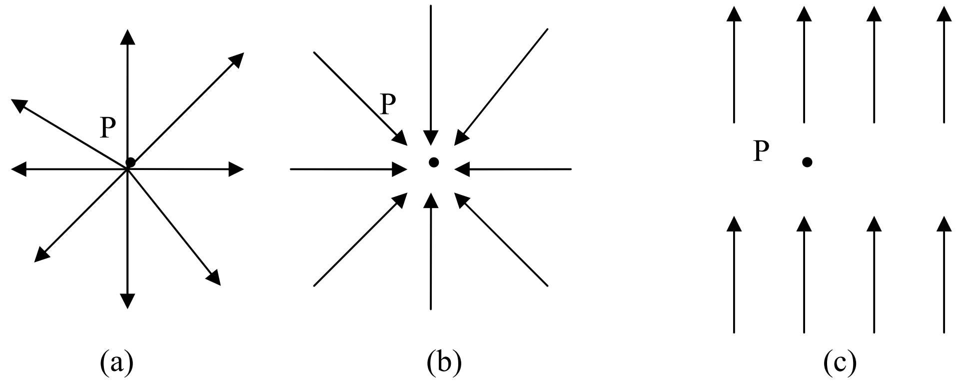
$$\nabla W = 10\sin^2\theta\cos\phi\mathrm{a}_r + 10\sin 2\theta\cos\phi\mathrm{a}_\theta - 10\sin\theta\sin\phi\mathrm{a}_\phi$$

Diverjans ve Diverjans Teoremi

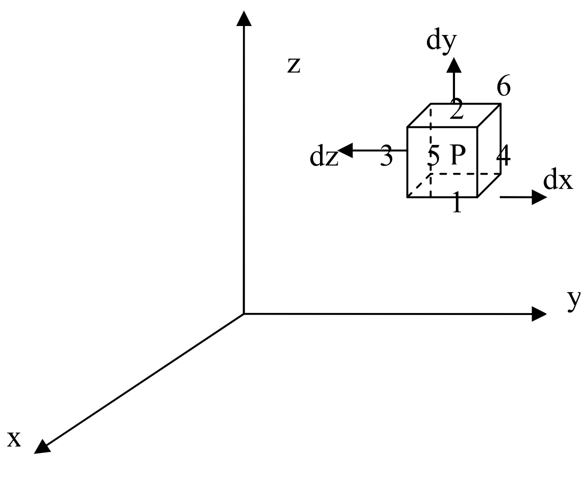
Bu bölümde bir vektör alanın kapalı bir yüzeyden geçen toplam akısını hesaplamamızı sağlayan diverjans teoremiyle ilgileneceğiz. Herhangi bir P noktasının diverjansı A vektör alanı için

$$div\mathrm{A} = \nabla \cdot \mathrm{A} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_S \mathrm{A} \cdot dS}{\Delta v}$$

ile verilir. Bu aynı zamanda bir vektör alanın uzayda noktadan noktaya nasıl değiştiğinin ölçüsüdür. Diverjans skaler bir büyüklüktür. Bir vektör alanın diverjansı sıfırdan farklı olması bu noktada bir kaynak veya yutak olduğunun göstergesidir. Farklı durumlarda diverjansın değişimi Şekil 11. de gösterilmiştir.



Şekil 11. Bir vektör alanın P noktasındaki diverjansının şematik gösterimi. (a) Diverjans pozitif. (b) Diverjans negatif. (c) Diverjans sıfır.



Şekil 12. P noktasında $\nabla \cdot \mathrm{A}$ nın teoreminin elde edilmesi.

Şekil 12. de verilen küçük kutularda 1 ve 2, 3 ve 4, 5 ve 6 yüzlerinden geçen toplam akıyı hesaplayalım. Bu durumda

$$\psi = \oint_S \mathrm{A} \cdot dS$$

bağıntısını kullanılır. dS yüzey alanları dxdy, dydz ve dx dz ile hesaplanır. Bu durumda limiti sıfıra giden küçük küp şeklindeki cisim toplam 6 yüzeyi için akı

$$(\text{Net akı})_{1+2} = (A_z - A_{z+dz}).\mathrm{a}_z dxdy = \frac{\partial A_z}{\partial z} dzdxdy$$

$$(\text{Net akı})_{3+4} = (A_x - A_{x+dx}).\mathrm{a}_x dzdy = \frac{\partial A_x}{\partial x} dxdzdy$$

$$(\text{Net akı})_{5+6} = (A_y - A_{y+dy}).\mathrm{a}_y dxdz = \frac{\partial A_y}{\partial y} dydxdz$$

ile hesaplanabilir. Bu bağıntıları topladığımızda

$$(\text{Net akı})_{Toplam} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dxdydz$$

elde ederiz. dv=dxdydz eşitliği kullanılır ve denklem yeniden düzenlenirse

$$(\text{Net akı})_{Toplam} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dv$$

$$\frac{(\text{Net akı})_{Toplam}}{dv} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \quad (1)$$

elde edilir ve

$$div\mathrm{A} = \nabla \cdot \mathrm{A} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\oint_S \mathrm{A} \cdot dS}{\Delta v} \quad (2)$$

bağıntısı aşağıdaki şekilde yazılırsa

$$\lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_S \mathrm{A} \cdot dS}{\Delta v} = \frac{(\text{Net akı})_{Toplam}}{dv} \quad (3)$$

elde edilir. (1) ,(2) ve (3) bağıntılarından diverjans bağıntısı aşağıdaki şekilde

$$div\mathrm{A} = \nabla \cdot \mathrm{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad \textbf{(4)}$$

yazılır. Diverjans bağıntısının sonucu skalerdir. Vektör bir büyüklüğün yönlere göre türevlerinin alındığı denklem (4) te görülmektedir. Denklem (2) den diverjans teoremi aşağıdaki şekilde yazılır.

$$\oint_S \mathrm{A} \cdot dS = \int_v \nabla \cdot \mathrm{A} dv \quad (5)$$

Bu matematiksel ifade; herhangi bir vektör alanının bir yüzey boyunca toplam akısı, bu vektör alanın yönsel türevlerinin toplamı, yani hacmine eşit olacağını söyler.

A ve B iki vektör olmak üzere

$$\nabla \cdot (\mathrm{A} + \mathrm{B}) = \nabla \cdot \mathrm{A} + \nabla \cdot \mathrm{B}$$

özelliği vardır.

Örnek 3:

Verilen $\mathrm{P} = x^2 yz\mathrm{a}_x + xz\mathrm{a}_z$ vektörünün diverjansını hesaplayınız.

Çözüm:

$$\nabla \cdot \mathrm{P} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} P_x + \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}} P_y + \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}} P_z = \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}(x^2 yz) + \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}(0) + \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}(xz)$$

$$= 2xyz + x$$

Örnek 4:

Verilen A vektörü için diverjansını hesap ediniz ve (1,-2,3) noktasındaki değerini bulunuz. $\mathrm{A} = yz\mathrm{a}_x + 4xy\mathrm{a}_y + y\mathrm{a}_z$

Çözüm:

$$\nabla \cdot \mathrm{A} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} A_x + \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}} A_y + \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}} A_z = \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}(yz) + \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}(4xy) + \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}(y)$$

$$= 4x = 4$$

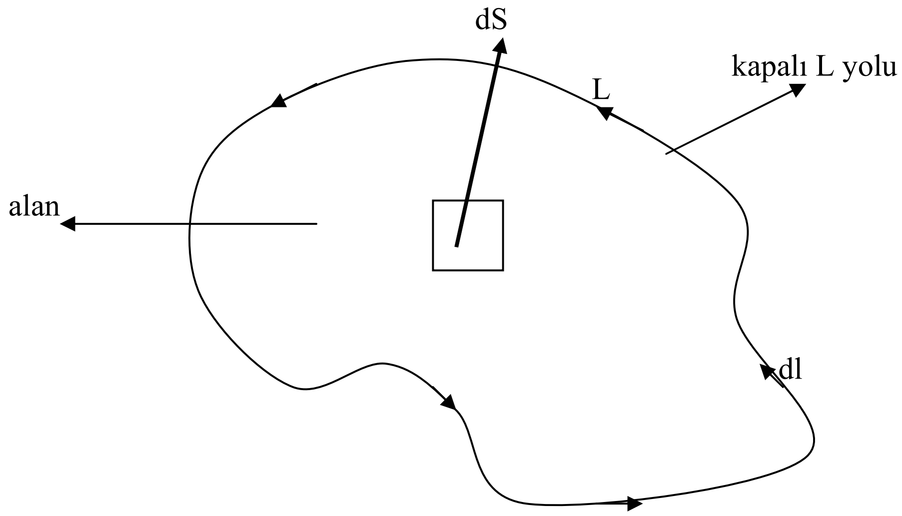
Bir Vektörün Rotasyonu ve Stokes Teoremi

Bir A vektör alanın kapalı bir eğri boyunca integralini ifade eder. Curl A veya Rot A şeklinde de gösterilir. Bu matematiksel ifade eğer sıfırdan farklı ise bize vektörün ekseni etrafında bir döndürücü kuvveti olduğunu ifade eder. Bir küvet içindeki su boşalmaya başladığında herkesin bildiği gibi su yüzeyinde dairesel halkalar görürüz. İşte burada suyun bir döndürme kuvveti, yani rotasyon sıfırdan farklıdır.

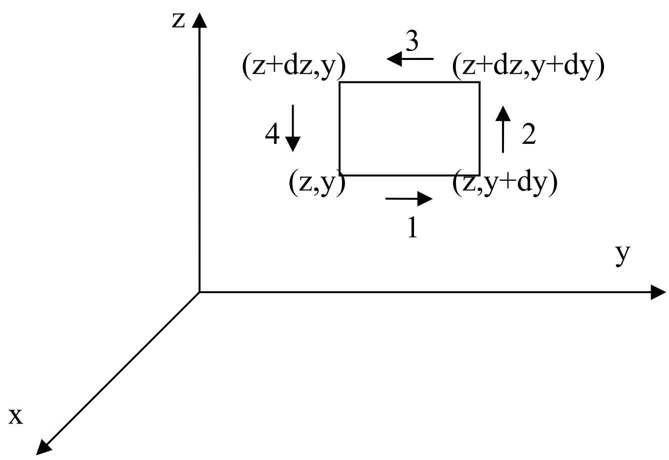
$$curl\mathrm{A} = \nabla \times \mathrm{A} = \left(\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_L \mathrm{A} \cdot d\mathrm{l}}{\Delta \mathrm{S}} \right) \mathrm{a}_{\substack{\mathrm{n} \\ \mathrm{max}}}$$

$$\oint_L \mathrm{A} \cdot d\mathrm{l} = \int_S \left(\nabla \times \mathrm{A} \right) \cdot dS$$

bağıntısı Stokes teoremi olarak bilinir. Şekil 13. te çizgi integral ve alan integrali gösterilmiştir. Bu bağıntıda ΔS kapalı L eğrisinin çevrelediği alandır.



Şekil 13. Stokes teoremi çizgisel kapalı alan ve ilgili yüzey.



Şekil 14. Çok küçük bir karenin kenarları boyunca çizgi integrali.

$$\psi = \oint_L \mathrm{A} \cdot d\mathrm{l}$$

Şekil 14 te 1,2,3 ve 4 nolu çizgilerin integrali

$$\oint_1 \mathrm{A} \cdot d\mathrm{l} = A_y(1)dy$$
$$\oint_2 \mathrm{A} \cdot d\mathrm{l} = A_z(2)dz$$
$$\oint_3 \mathrm{A} \cdot d\mathrm{l} = -A_y(3)dy$$
$$\oint_4 \mathrm{A} \cdot d\mathrm{l} = -A_z(4)dz$$

ile verilir. Son 4 denklem toplanırsa

$$\oint_L \mathrm{A} \cdot d\mathrm{l} = \left(\mathrm{A}_y(1) - A_y(3)\right)dy + \left(\mathrm{A}_z(2) - A_z(4)\right)dz \quad (6)$$

ve

$$\mathrm{A}_y(3) - A_y(1) = \frac{\partial A_z}{\partial y} dy \quad \mathbf{(7)}$$
$$\mathrm{A}_z(2) - A_z(4) = \frac{\partial A_y}{\partial z} dz \quad \mathbf{(8)}$$

olduğu Şekil 14 ten görülebilir. Dolayısıyla (7) ve (8) bağıntısı (6) da yerine konulursa

$$\oint_L \mathrm{A} \cdot d\mathrm{l} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) dydz$$

denklemi elde edilir. A nın x bileşeni için

$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_L \mathrm{A} \cdot d\mathrm{l}}{\Delta \mathrm{S}} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right)$$

elde edilir. Benzer şekilde A nın y ve z bileşenleri için çizgi integral yazılıp toplanırsa. Sırasıyla

$$\left(curl\mathrm{A} \right)_x = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right)$$
$$\left(curl\mathrm{A} \right)_y = \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right)$$
$$\left(curl\mathrm{A} \right)_z = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$$

elde edilir. Sonuç olarak A nın rotasyoneli aşağıdaki şekilde gösterilir ve hesaplanır.

$$\nabla \times \mathrm{A} = \begin{vmatrix} \mathrm{a}_\mathrm{x} & \mathrm{a}_\mathrm{y} & \mathrm{a}_\mathrm{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times \mathrm{A} = \left[\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right] \mathrm{a}_\mathrm{x} + \left[\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right] \mathrm{a}_\mathrm{y} + \left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right] \mathrm{a}_\mathrm{z}$$

Bir vektörün rotasyoneli bir başka vektör alandır. Del operatörü bir vektör ve A vektörüyle rotasyoneli yine bir vektördür. A,B vektör ve V skaler alan olmak üzere rotasyonel işlemi aşağıdaki özelliklere sahiptir.

1) $\nabla \times (\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \nabla \times \mathrm{A} + \nabla \times \mathrm{B}$
2) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathrm{A}) = 0$
3) $\nabla \times \nabla V = 0$

Örnek 5: $P = x^2 yz\mathrm{a}_x + xz\mathrm{a}_z$ vektörü için $\nabla \times P$ işlemini yapınız.

Çözüm:

$$\nabla \times \mathrm{P} = \begin{vmatrix} \mathrm{a}_x & \mathrm{a}_y & \mathrm{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P_x & P_y & P_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times \mathrm{P} = \begin{vmatrix} \mathrm{a}_x & \mathrm{a}_y & \mathrm{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2 yz & 0 & xz \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times \mathrm{P} = [0-0]\mathrm{a}_x + [x^2 y - z]\mathrm{a}_y + [0 - x^2 z]\mathrm{a}_z$$

$$\nabla \times \mathrm{P} = (x^2 y - z)\mathrm{a}_y - x^2 z\mathrm{a}_z$$

Örnek 6: $A = xz^3\mathrm{a}_x - 2x^2 yz\mathrm{a}_y + 2yz^4\mathrm{a}_z$ **vektörü için** $\nabla \times A$ işlemini yapınız ve (1,-1,1) noktasındaki değerini bulunuz.

Çözüm:

$$\nabla \times \mathrm{A} = \begin{vmatrix} \mathrm{a}_x & \mathrm{a}_y & \mathrm{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times \mathrm{A} = \begin{vmatrix} \mathrm{a}_x & \mathrm{a}_y & \mathrm{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xz^3 & -2x^2yz & 2yz^4 \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times \mathrm{A} = \left[2z^4 + 2x^2y\right]\mathrm{a}_x + \left[3z^2x - 0\right]\mathrm{a}_y + \left[-4xyz - 0\right]\mathrm{a}_z$$

$$\nabla \times \mathrm{A} = \left(2z^4 + 2x^2y\right)\mathrm{a}_x + \left(3z^2x\right)\mathrm{a}_y - \left(4xyz\right)\mathrm{a}_z$$

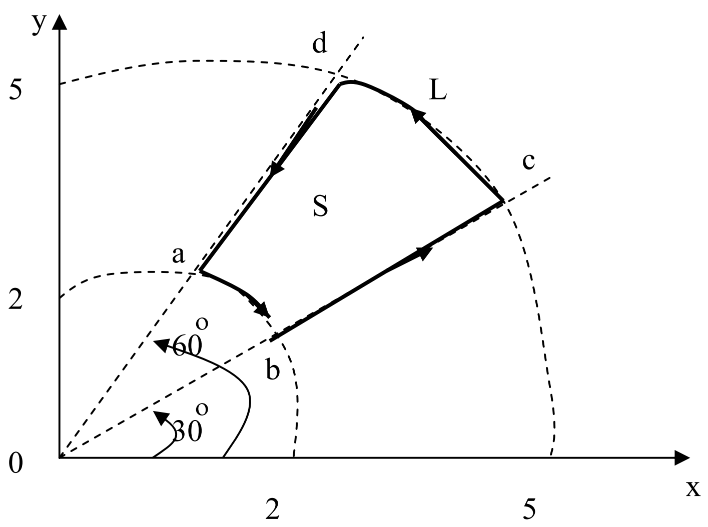
sonucun (1,-1,1) noktasındaki değeri

$$\nabla \times \mathrm{A} = \left(2(1)^4 + 2(1)^2(-1)\right)\mathrm{a}_x + \left(3(1)^2(1)\right)\mathrm{a}_y - \left(4(1)(-1)(1)\right)\mathrm{a}_z$$

$$\nabla \times \mathrm{A} = 3\mathrm{a}_y + 4\mathrm{a}_z$$

Örnek 3:

Eğer $A = \rho\cos\phi a_\rho + \sin\phi a_\phi$ ise $\oint A \cdot dl$ çizgi integralini verilen şekle göre hesaplayınız ve Stokes teoremini doğrulayınız.



Şekil 15. örnek 3 te tanımlanan çizgi integral.

Çözüm:

$$\oint \mathrm{A}\cdot d\mathrm{l} = \left[\int_a^b + \int_b^c + \int_c^d + \int_d^a\right]\mathrm{A}\cdot d\mathrm{l}$$

ab için $\rho = 2$ ve $d\mathrm{l} = \rho d\phi \mathrm{a}_\phi$

$$\oint \mathrm{A}\cdot d\mathrm{l} = \int_{\phi=60^\circ}^{30^\circ} \rho \sin\phi d\phi = 2(-\cos\phi)\Big|_{60^\circ}^{30^\circ} = -\left(\sqrt{3}-1\right)$$

bc için $\phi = 30^\circ$ ve $d\mathrm{l} = d\rho \mathrm{a}_\rho$

$$\oint \mathrm{A}\cdot d\mathrm{l} = \int_{\rho=2}^{5} \rho\cos\phi d\rho = \cos 30^\circ \left.\frac{\rho^2}{2}\right|_2^5 = \frac{21\sqrt{3}}{4}$$

cd için $\rho = 5$ ve $d\mathrm{l} = \rho d\phi \mathrm{a}_\phi$

$$\oint \mathrm{A}\cdot d\mathrm{l} = \int_{\phi=30^\circ}^{60^\circ} \rho \sin\phi d\phi = 5(-\cos\phi)\Big|_{30^\circ}^{60^\circ} = \frac{5}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$$

ve çizgi integralin son kısmı için yani da için $\phi = 60^\circ$ ve $d\mathrm{l} = d\rho \mathrm{a}_\rho$

$$\oint \mathrm{A}\cdot d\mathrm{l} = \int_{\rho=5}^{2} \rho\cos\phi d\rho = \cos 60^\circ \left.\frac{\rho^2}{2}\right|_2^5 = -\frac{21}{4}$$

son olarak hesaplanan dört parça toplanırsa çizgi integralin değeri

$$\oint \mathrm{A}\cdot d\mathrm{l} = -\sqrt{3} + 1 + \frac{21\sqrt{3}}{4} + \frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2} - \frac{21}{4} = \frac{27}{4}\left(\sqrt{3}-1\right) = 4.941$$

Stokes teoremini doğrulayabilmek için aşağıdaki integrali alıp bir önceki çizgi integralin sonucuyla eşit olduğunu görmeliyiz. Bu durumda

$$\oint_L \mathrm{A}\cdot d\mathrm{l} = \int_S \left(\nabla \times \mathrm{A}\right)\cdot d\mathrm{S}$$

bu işlemi yapabilmek için silindirik koordinatlarda rotasyon operatörünü bilmemiz gerekiyor. Bu ise aşağıdaki şekildedir.

$$\nabla \times \mathrm{A} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \mathrm{a}_\rho & \rho \mathrm{a}_\phi & \mathrm{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial \rho} & \dfrac{\partial}{\partial \phi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times \mathrm{A} = \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right]\mathrm{a}_\rho + \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right]\mathrm{a}_\phi + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi}\right]\mathrm{a}_z$$

Aynı zamanda alan elemanı $dS = \rho d\phi d\rho \mathrm{a}_z$ ile verilmiştir.

$$\nabla \times \mathrm{A} = \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right]\mathrm{a}_\rho + \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right]\mathrm{a}_\phi + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi}\right]\mathrm{a}_z$$

$$\nabla \times \mathrm{A} = \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right]\mathrm{a}_\rho + \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right]\mathrm{a}_\phi + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho \sin\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial(\rho \cos\phi)}{\partial \phi}\right]\mathrm{a}_z$$

$$\nabla \times \mathrm{A} = (0-0)\mathrm{a}_\rho + (0-0)\mathrm{a}_\phi + \frac{1}{\rho}\left[A_\phi - (-\rho \sin\phi)\right]\mathrm{a}_z$$

$$\nabla \times \mathrm{A} = (0-0)\mathrm{a}_\rho + (0-0)\mathrm{a}_\phi + \frac{1}{\rho}\left[\sin\phi + \rho \sin\phi\right]\mathrm{a}_z$$

$$= (0-0)\mathrm{a}_\rho + (0-0)\mathrm{a}_\phi + \frac{1}{\rho}(\sin\phi + \rho \sin\phi)\mathrm{a}_z$$

$$= (0-0)\mathrm{a}_\rho + (0-0)\mathrm{a}_\phi + \frac{1}{\rho}((1+\rho)\sin\phi)\mathrm{a}_z$$

Dolayısıyla $\oint_L \mathrm{A} \cdot d\mathrm{l} = \int_S (\nabla \times \mathrm{A}) \cdot d\mathrm{S}$ integralinde bulduğumuz bağıntıları yerlerine yazarsak

$$\int_S (\nabla \times \mathrm{A}) \cdot d\mathrm{S} = \int_{\phi=30^\circ}^{60^\circ} \int_{\rho=2}^{5} \frac{1}{\rho}((1+\rho)\sin\phi)\mathrm{a}_z \cdot dS$$

$$\int_S (\nabla \times \mathrm{A}) \cdot d\mathrm{S} = \int_{\phi=30^\circ}^{60^\circ} \int_{\rho=2}^{5} \frac{1}{\rho}((1+\rho)\sin\phi)\mathrm{a}_z \cdot \rho d\phi d\rho \mathrm{a}_z$$

$$\int_S (\nabla \times \mathrm{A}) \cdot d\mathrm{S} = \int_{\phi=30^\circ}^{60^\circ} \sin\phi d\phi \int_{\rho=2}^{5} \frac{1}{\rho}(1+\rho)\rho d\rho$$

$$\int_S (\nabla \times \mathrm{A}) \cdot d\mathrm{S} = -\cos\phi\Big|_{30}^{60} \left(\rho + \frac{\rho^2}{2}\right)\Bigg|_2^5 = \frac{27}{4}\left(\sqrt{3}-1\right) = 4.941$$

Örnek 4: A vektörü için $\nabla \cdot (\nabla \times \mathrm{A}) = 0$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathrm{A}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{a}_x, \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{a}_y, \frac{\partial}{\partial z}\mathrm{a}_z\right) \cdot \begin{vmatrix} \mathrm{a}_x & \mathrm{a}_y & \mathrm{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{a}_x, \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{a}_y, \frac{\partial}{\partial z}\mathrm{a}_z\right) \cdot \left(\left[\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right]\mathrm{a}_x + \left[\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right]\mathrm{a}_y + \left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right]\mathrm{a}_z \right)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right] \right)$$

$$= \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y} = 0$$

Ödev

V skaler olmak üzere $\nabla \times \nabla V = 0$ olduğunu gösteriniz.

Laplasiyen

Laplasiyen işlemi bir V skalerinin gradyentinin diverjansıdır ve $\nabla \cdot \nabla V = \nabla^2 V$ ile gösterilir. Daha açık biçimde laplasiyen

$$\nabla \cdot \nabla V = \nabla^2 V = \left[\frac{\partial}{\partial x} \mathrm{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathrm{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathrm{a}_z \right] \cdot \left[\frac{\partial V}{\partial x} \mathrm{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathrm{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \mathrm{a}_z \right]$$

ve sonuç olarak laplasiyen

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

kartezyen koordinatlarda yazılır. Skalerin laplasiyeni yine bir skalerdir. Eğer bu değer sıfır ise denklem Laplace denklemi, sıfır değilse Poisson denklemi olarak bilinir. Bu denklemler jeofizikte sıkça kullanılırlar. Doğru akım özdirenç modellemesi ve potansiyel teori bu denklemlerin uygulama alanlarından sadece birisidir. Denklemin sıfır olması şu anlama gelmektedir: Laplace denkleminin tanımlı olduğu alanda kaynak ve yutak noktası yok şeklinde yorumlanır. Laplasiyenin sıfırdan farklı olması durumunda denklem Poisson denklemi olarak bilinir. Bu bölgede yutağın veya kaynağın varlığına işarettir.

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Laplasiyen vektörlere aşağıdaki şekilde uygulanabilir. A bir vektör olmak üzere

$$\nabla^2 \mathrm{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathrm{A}) - \nabla \times \nabla \times \mathrm{A}$$

$$\nabla^2 \mathrm{A} = \nabla^2 \mathrm{A}_\mathrm{x} \mathrm{a}_\mathrm{x} + \nabla^2 \mathrm{A}_\mathrm{y} \mathrm{a}_\mathrm{y} + \nabla^2 \mathrm{A}_\mathrm{z} \mathrm{a}_\mathrm{z}$$

şeklinde yazılır.

Örnek 5:

$V = e^{-z} \sin 2x \cosh y$ **için** $\nabla^2 V$ **hesaplayınız.**

Çözüm:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$= \frac{\partial^2 \left(e^{-z} \sin 2x \cosh y\right)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \left(e^{-z} \sin 2x \cosh y\right)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \left(e^{-z} \sin 2x \cosh y\right)}{\partial z^2}$$

$$= \frac{\partial\left(2e^{-z}\cos 2x \cosh y\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(e^{-z}\sin 2x \sinh y\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(-e^{-z}\sin 2x \cosh y\right)}{\partial z}$$

$$= -4e^{-z}\sin 2x \cosh y + e^{-z}\sin 2x \cosh y + e^{-z}\sin 2x \cosh y$$

$$= -4e^{-z}\sin 2x \cosh y + 2e^{-z}\sin 2x \cosh y$$

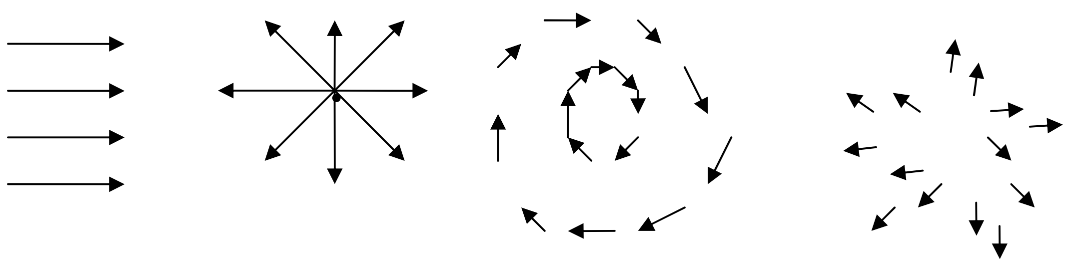
$$= -2e^{-z}\sin 2x \cosh y$$

Vektör Alanların Sınıflandırılması

Şekil 16 da dört temel sınıflandırma görülmektedir. Bu sınıflandırmalar vektörlerin diverjans ve rotasyon durumlarına göre yapılmıştır. Diverjans ve rotasyon işlemlerinin sonucunun sıfıra eşit olup olmamasına göre vektörlerin durumu Şekil 16 da gösterilmiştir.

$$\nabla \cdot \mathrm{A} = 0,\ \nabla \times \mathrm{A} = 0$$
$$\nabla \cdot \mathrm{A} \neq 0,\ \nabla \times \mathrm{A} = 0$$
$$\nabla \cdot \mathrm{A} = 0,\ \nabla \times \mathrm{A} \neq 0$$
$$\nabla \cdot \mathrm{A} \neq 0,\ \nabla \times \mathrm{A} \neq 0$$

Daha öncede bahsedildiği gibi eğer bir vektör alanın diverjansı sıfır ise bu durumda A vektör alanı kaynak ve yutak noktası değildir. Örnek olarak Şekil 16 (a) gösterilebilir. Eğer diverjans sıfıra eşit değilse bu durumda A noktası bir kaynak noktası olarak değerlendirilir (Diverjans pozitif ise oklar dışarı doğru, bir kaynak noktasını temsil eder. Eğer diverjans negatif ise oklar içe doğru, bir yutak noktasını temsil eder.) Şekil 16 (b). Şekil 16 (c) de diverjansı sıfır fakat rotasyonu sıfırdan farklı bir vektör alanın şekli gösterilmiştir. Bu durumda vektör alanın bir döndürme kuvveti olduğu şekilden anlaşılmaktadır. Şekil 16 (d) de ise hem rotasyon hem de diverjans sıfırdan farklıdır.



(a) (b) (c) (d)

Şekil 16. Vektör alanların diverjans ve rotasyon işlemlerinin sonucuna göre sınıflandırılması.

KAYNAK

Sadiku, M. N. O., 1995, Elements of Electromagnetics, Oxford University Press, 821 sayfa.