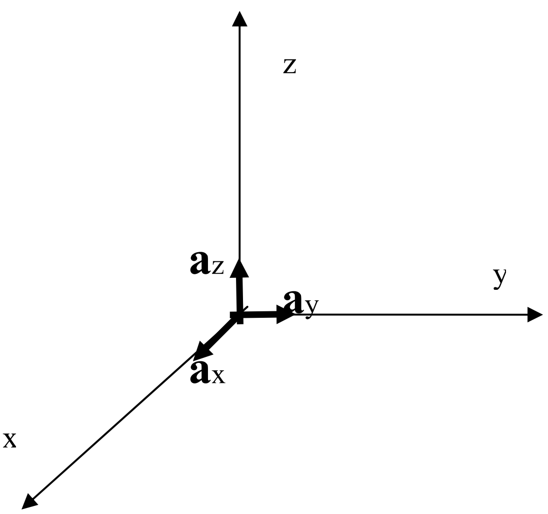
KOORDİNAT SİSTEMLERİ ve DÖNÜŞÜMLER

Bir önceki bölümde Kartezyen koordinat sisteminde işlemlerimizi yaptık. Kartezyen koordinat sisteminden başka birçok koordinat sistemleri vardır. Bu bölümde kartezyen koordinat sistemine ek olarak silindirik ve küresel koordinat sistemlerini göreceğiz. Daha sonra bu koordinat sistemleri arasında nasıl dönüşüm yapacağımızı inceleyeceğiz.

Değişik koordinatların kullanılmasının nedeni basittir: işlerimizi kolaylaştırmak için. İlgilenilen problemin doğası gereği bazı durumlarda silindirik koordinatlarda, küresel veya bir başka koordinat sisteminde hesaplamalar yapmak işlerimizi kolaylaştırmaktadır.

Kartezyen Koordinatlar

Şekil 1.de Kartezyen koordinat sistemi gösterilmiştir. Kartezyen koordinat sisteminde eksenler birbirlerine diktir. Birim vektörlerin yönü Şekil 1. de gösterildiği gibidir.



Şekil 1. Kartezyen koordinat sistemi.

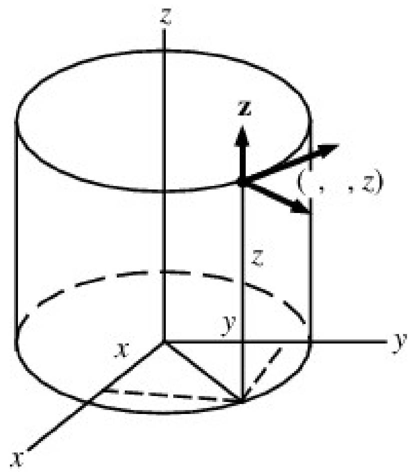
$$-\infty < x < \infty$$
$$-\infty < y < \infty$$
$$-\infty < z < \infty$$

Daha önceki bölümden hatırlayacağımız gibi bir vektör kartezyen koordinat sisteminde

$\mathrm{A} = A_x \mathrm{a}_x + A_y \mathrm{a}_y + A_z \mathrm{a}_z$ şeklinde gösterilir.

Silindirik Koordinatlar

Silindirik koordinat sistemi silindirik simetri özelliği gösteren problemlerde kullanılması uygundur ve hesaplamalarda kolaylık sağlar.



Şekil 2. Silindirik koordinat sistemi
http://mathworld.wolfram.com/CylindricalCoordinates.html

Silindirik koordinat sisteminde bir P noktası (ρ, ϕ, z) ile gösterilir. Şekil 2. silindirik koordinat sistemini göstermektedir. Silindirin yarı çapı ρ, azimut açısı ϕ ve z düşey ekseni göstermektedir. Burada değişkenler

$$
\begin{gathered}
0 \le \rho < \infty \\
0 \le \phi \le 2\pi \\
-\infty < z < \infty
\end{gathered}
$$

aralığında değişir. Silindirik koordinat sisteminde bir A vektörü Kartezyen koordinat sistemine benzer şekilde

$$\mathrm{A} = A_\rho \mathrm{a}_\rho + A_\phi \mathrm{a}_\phi + A_z \mathrm{a}_z$$

yazılır. A vektörünün bileşenleri (A_ρ, A_ϕ, A_z) ve birim vektörler ise $(\mathrm{a}_\rho, \mathrm{a}_\phi, \mathrm{a}_z)$ şeklindendir. A vektörünün boyu

$$|\mathrm{A}| = \left(A_\rho^{\ 2} + A_\phi^{\ 2} + A_z^{\ 2}\right)^{1/2}$$

bağıntısıyla hesaplanır. Silindirik koordinat sisteminde birim vektörler

$$\mathrm{a}_\rho \cdot \mathrm{a}_\rho = \mathrm{a}_\phi \cdot \mathrm{a}_\phi = \mathrm{a}_z \cdot \mathrm{a}_z = 1$$
$$\mathrm{a}_\rho \cdot \mathrm{a}_\phi = \mathrm{a}_\phi \cdot \mathrm{a}_z = \mathrm{a}_z \cdot \mathrm{a}_\rho = 0$$

$$\mathrm{a}_\rho \times \mathrm{a}_\phi = \mathrm{a}_z$$
$$\mathrm{a}_\phi \times \mathrm{a}_z = \mathrm{a}_\rho$$
$$\mathrm{a}_z \times \mathrm{a}_\rho = \mathrm{a}_\phi$$

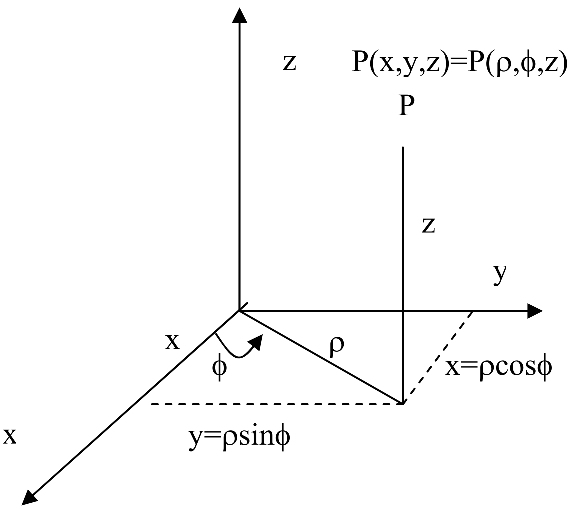
şeklindedir. Kartezyen koordinat sistemi (x,y,z) değişkenleri ile silindirik koordinat sistemi (ρ, ϕ, z) değişkenleri arasında aşağıdaki ilişkiler vardır. Bu ilişkiler

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$z = z$$

$$x = \rho \cos\phi$$

$$y = \rho \sin\phi$$
$$z = z$$

şeklindedir.



Şekil 3. Silindirik ve Kartezyen koordinat sistemlerinin arasındaki ilişki.

Şimdi iki koordinat arasındaki birim vektörler arasındaki ilişkiye bakalım.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{a}_x &= \cos\phi \mathrm{a}_\rho - \sin\phi \mathrm{a}_\phi \\
\mathrm{a}_y &= \sin\phi \mathrm{a}_\rho + \cos\phi \mathrm{a}_\phi \\
\mathrm{a}_z &= \mathrm{a}_z
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\mathrm{a}_\rho &= \cos\phi \mathrm{a}_x + \sin\phi \mathrm{a}_y \\
\mathrm{a}_\phi &= -\sin\phi \mathrm{a}_x + \cos\phi \mathrm{a}_y \\
\mathrm{a}_z &= \mathrm{a}_z
\end{aligned}
$$

Son olarak (A_x, A_y, A_z) ve (A_ρ, A_ϕ, A_z) vektörleri arasındaki ilişki aşağıdaki şekilde bulunur.

$$
\mathrm{A} = (A_x \cos\phi + A_y \sin\phi)\mathrm{a}_\rho + (-A_x \sin\phi + A_y \cos\phi)\mathrm{a}_\phi + A_z \mathrm{a}_z
$$

veya bu bağıntı bileşenleri şeklinde

$$
A_\rho = A_x \cos\phi + A_y \sin\phi
$$

$$
A_\phi = -A_x \sin\phi + A_y \cos\phi
$$

$$
A_z = A_z
$$

ile gösterilir. Bu dönüşüm matrislerle aşağıdaki şekilde hesaplanabilir. Kartezyen koordinatlardan silindirik koordinatlara dönüşüm

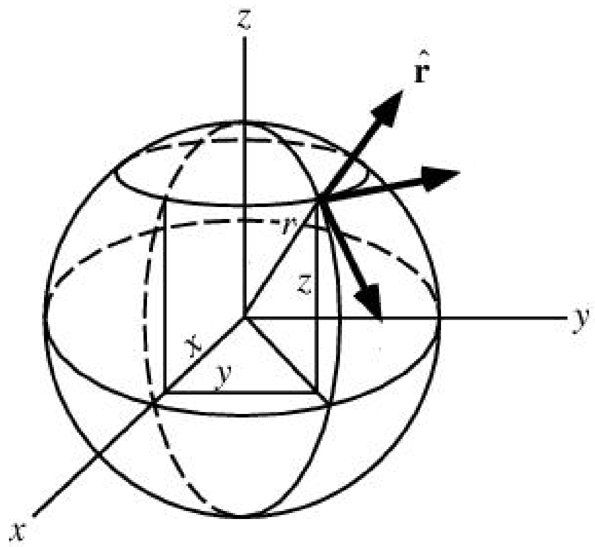
$$
\begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}
$$

matris çarpımı ile hesaplanır. Silindirik koordinatlardan kartezyen koordinatlara dönüşüm ise

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix}$$

matrisi ile hesaplanabilir.

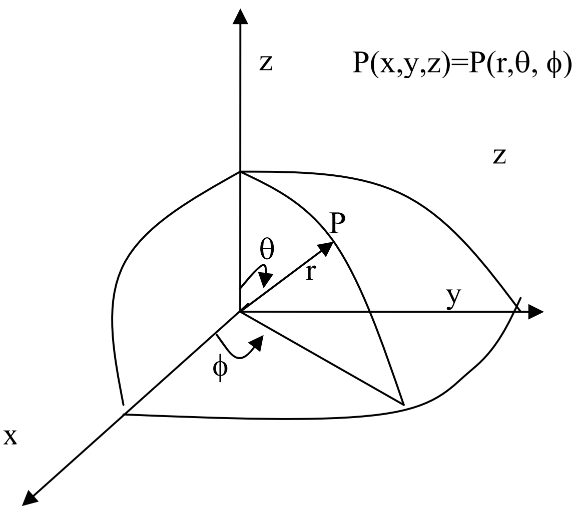
Küresel Koordinatlar



Şekil .4 Küresel Koordinat sistemi.
http://mathworld.wolfram.com/SphericalCoordinates.html

Küresel koordinatlar genellikle küresel özellik gösteren problemlerde kullanılır. Özellikle global olarak yer küresini ele aldığımızda, küresel koordinatları hesaplamalarda kullanmak hesaplamalarda kolaylık sağlayacaktır. Herhangi bir nokta küresel koordinatlarda $P(r,\theta,\phi)$ ile gösterilir. $P(r,\theta,\phi)$ lerin değişim aralığı aşağıdaki gibidir.

$$0 \leq r < \infty$$
$$0 \leq \theta \leq \pi$$
$$0 \leq \phi \leq 2\pi$$



Şekil 5. Küresel koordinatlar.

Küresel koordinatlarda bir vektör kartezyen ve silindirik koordinatlara benzer şekilde

$$\mathrm{A} = A_r \mathrm{a}_r + A_\theta \mathrm{a}_\theta + A_\phi \mathrm{a}_\phi$$

ile gösterilir. A vektörünün bileşenleri (A_r, A_θ, A_ϕ) ile ve birim vektörler ise $(\mathrm{a}_r, \mathrm{a}_\theta, \mathrm{a}_\phi)$ şeklindendir. A vektörünün boyu

$$|\mathrm{A}| = \left(A_r^{\,2} + A_\theta^{\,2} + A_\phi^{\,2}\right)^{1/2}$$

ile hesaplanır. Birim vektörler küresel koordinatlarda

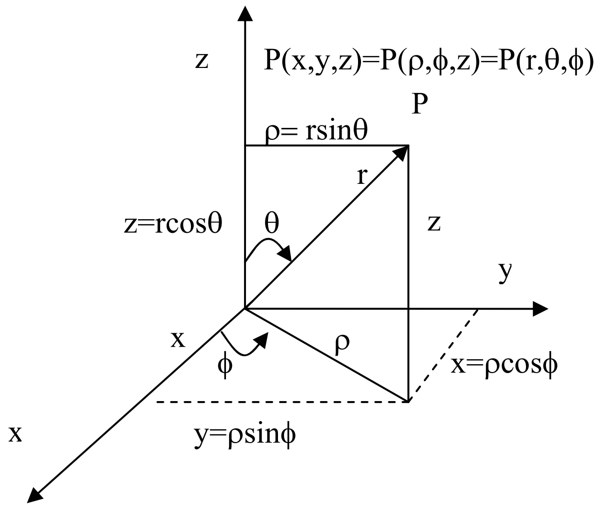
$$\mathrm{a}_r \cdot \mathrm{a}_r = \mathrm{a}_\theta \cdot \mathrm{a}_\theta = \mathrm{a}_\phi \cdot \mathrm{a}_\phi = 1$$
$$\mathrm{a}_r \cdot \mathrm{a}_\theta = \mathrm{a}_\theta \cdot \mathrm{a}_\phi = \mathrm{a}_\phi \cdot \mathrm{a}_r = 0$$
$$\mathrm{a}_r \times \mathrm{a}_\theta = \mathrm{a}_\phi$$
$$\mathrm{a}_\theta \times \mathrm{a}_\phi = \mathrm{a}_r$$
$$\mathrm{a}_\phi \times \mathrm{a}_r = \mathrm{a}_\theta$$

biçimindedir. Kartezyen koordinatlarda (x,y,z) değişkenleri ile küresel koordinatlarda (r, θ, ϕ) değişkenleri arasında aşağıdaki ilişkiler

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right)$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

vardır.



Şekil 6. Küresel ve kartezyen koordinat sistemleri arasındaki ilişki.

$$x = r\sin\theta\cos\phi$$
$$y = r\sin\theta\sin\phi$$
$$z = r\cos\theta$$

$$\mathrm{a}_{\mathrm{x}} = \sin\theta\cos\phi\mathrm{a}_{\mathrm{r}} + \cos\theta\cos\phi\mathrm{a}_{\theta} - \sin\phi\mathrm{a}_{\phi}$$
$$\mathrm{a}_{\mathrm{y}} = \sin\theta\sin\phi\mathrm{a}_{\mathrm{r}} + \cos\theta\sin\phi\mathrm{a}_{\theta} + \cos\phi\mathrm{a}_{\phi}$$
$$\mathrm{a}_{\mathrm{z}} = \cos\theta\mathrm{a}_{\mathrm{r}} - \sin\theta\mathrm{a}_{\theta}$$

$$\mathrm{a}_{\mathrm{r}} = \sin\theta\cos\phi\mathrm{a}_{\mathrm{x}} + \sin\theta\sin\phi\mathrm{a}_{y} - \sin\theta\mathrm{a}_{z}$$
$$\mathrm{a}_{\theta} = \cos\theta\cos\phi\mathrm{a}_{\mathrm{x}} + \cos\theta\sin\phi\mathrm{a}_{y} - \sin\theta\mathrm{a}_{z}$$
$$\mathrm{a}_{\phi} = -\sin\phi\mathrm{a}_{\mathrm{x}} + \cos\phi\mathrm{a}_{y}$$

Son olarak $\left(A_x, A_y, A_z\right)$ ve $\left(A_r, A_\theta, A_\phi\right)$ vektörleri arasındaki ilişki aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\begin{aligned}\mathrm{A} = &\left(A_x \sin\theta\cos\phi + A_y \sin\theta\sin\phi + A_z \cos\theta\right)\mathrm{a}_r \; + \\ &\left(A_x \cos\theta\cos\phi + A_y \cos\theta\sin\phi - A_z \sin\theta\right)\mathrm{a}_\theta \; + \\ &\left(- A_x \sin\phi + A_y \cos\phi\right)\mathrm{a}_\phi\end{aligned}$$

veya bu bağıntı bileşenleri şeklinde

$$\begin{aligned}A_r &= A_x \sin\theta\cos\phi + A_y \sin\theta\sin\phi + A_z \cos\theta \\ A_\theta &= A_x \cos\theta\cos\phi + A_y \cos\theta\sin\phi - A_z \sin\theta \\ A_\phi &= - A_x \sin\phi + A_y \cos\phi\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu işlem matrislerle kolaylıkla aşağıdaki şekilde de hesaplanabilir. Kartezyen koordinatlardan küresel koordinatlara matrislerle

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

dönüşüm yapılabilir. Küresel koordinatlardan Kartezyen koordinatlara dönüşümler ise

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix}$$

matrisi ile yapılır.

Koordinat sistemlerinde üç değişkenden birisini sabit tutup diğer ikisini değişkense yüzeyi, ikisi sabit birisi değişken ise çizgiyi, üçü sabit ise noktayı temsil eder.

ALIŞTIRMALAR

1) Verilen P(-2,6,3) noktası için $\mathrm{A} = y\mathrm{a}_\mathrm{x} + (x + z)\mathrm{a}_\mathrm{y}$ vektörünü, kartezyen, silindirik ve küresel koordinatlarda yazınız.

Çözüm:

$P(-2,6,3)$ noktası ise değişkenler $x = -2, y = 6, z = 3$ şeklindendir.

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4+36} = 6.32$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{6}{-2}\right) = 108.43^\circ$$

$$z = 3$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{4+36+9} = 7$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{40}}{3}\right) = 64.62^\circ$$

Bu hesaplamalardan sonra P noktasını üç koordinat ekseninde

$$P_{Kar}(-2,6,3) = P_{Sil}(6.32,108.43^\circ,3) = P_{Kür}(7,64.62^\circ,108.43^\circ)$$

yazabiliriz. Kartezyen koordinatlarda A vektörü

$$\mathrm{A} = y\mathrm{a}_x + (x+z)\mathrm{a}_y = 6\mathrm{a}_x + \mathrm{a}_y$$

şeklindendir. Silindirik koordinatlarda A vektörü

$$\begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x+z \\ 0 \end{bmatrix}$$

matris çarpımıyla bulunabilir. Ve A vektörü bileşenleri şeklinde

$$A_\rho = y\cos\phi + (x+z)\sin\phi$$

$$A_\phi = -y\sin\phi + (x+z)\cos\phi$$

$$A_z = 0$$

yazılır. $x = \rho\cos\phi$ ve $y = \rho\sin\phi$ A vektöründe yerlerine konursa, A vektörü silindirik koordinat sisteminde yazılmış olur. Bu durumda A vektörü aşağıdaki gibi

$$\mathrm{A} = \left(A_\rho, A_\phi, A_z\right) = \left[\rho\cos\phi\sin\phi + \left(\rho\cos\phi + z\right)\sin\phi\right]\mathrm{a}_\rho$$
$$+ \left[-\rho\sin^2\phi + \left(\rho\cos\phi + z\right)\cos\phi\right]\mathrm{a}_\phi$$

olur. P noktasında için

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{6}{-2}\right)$$

ve

$\cos\phi = \dfrac{x}{\rho}$ ve $\sin\phi = \dfrac{y}{\rho}$ şeklinde yazılabilir. Böylece $\cos\phi = \dfrac{-2}{\sqrt{40}}$ ve $\sin\phi = \dfrac{6}{\sqrt{40}}$ olur. Dolayısıyla A vektörü sonuç olarak silindirik koordinatlarda aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\mathrm{A}\left(A_\rho, A_\phi, A_z\right) = \left[\sqrt{40}\frac{-2}{\sqrt{40}}\frac{6}{\sqrt{40}} + \left(\sqrt{40}\frac{-2}{\sqrt{40}} + 3\right)\frac{6}{\sqrt{40}}\right]\mathrm{a}_\rho$$
$$+ \left[-\sqrt{40}\left(\frac{6}{\sqrt{40}}\right)^2 + \left(\sqrt{40}\frac{-2}{\sqrt{40}} + 3\right)\frac{-2}{\sqrt{40}}\right]\mathrm{a}_\phi$$

$$\mathrm{A} = \frac{-6}{\sqrt{40}}\mathrm{a}_\rho - \frac{38}{\sqrt{40}}\mathrm{a}_\phi$$

Küresel koordinatlarda A vektörünü yazabilmek için benzer işlemler yapılır. Dönüşüm için matris çarpımını kullanabiliriz.

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x+z \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_r = y\sin\theta\cos\phi + (x+z)\sin\theta\sin\phi$$
$$A_\theta = y\cos\theta\cos\phi + (x+z)\cos\theta\sin\phi$$
$$A_\phi = -y\sin\phi + (x+z)\cos\phi$$

ve

$$x = r\sin\theta\cos\phi$$
$$y = r\sin\theta\sin\phi$$
$$z = r\cos\theta$$

A vektörünün bileşenlerinde değişkenler yerlerine konulursa

$$\begin{aligned} \mathrm{A} = (A_r, A_\theta, A_\phi) &= r\left[\sin^2\theta\cos\phi\sin\phi + (\sin\theta\cos\phi + \cos\theta)\sin\theta\sin\phi\right]\mathrm{a}_r \\ &+ r\left[\sin\theta\cos\theta\sin\phi\cos\phi + (\sin\theta\cos\phi + \cos\theta)\cos\theta\sin\phi\right]\mathrm{a}_\theta \\ &+ r\left[-\sin\theta\sin^2\phi + (\sin\theta\cos\phi + \cos\theta)\cos\phi\right]\mathrm{a}_\phi \end{aligned}$$

elde edilir. Değişkenleri hesaplanıp

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right)$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$r = \sqrt{(-2)^2 + 6^2 + 3^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{(-2)^2 + 6^2}}{3}\right)$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{6}{-2}\right)$$

$r = 7$, $\tan\phi = \frac{6}{-2}$, $\tan\theta = \frac{\sqrt{40}}{3}$. İşlemlere devam edilirse
ve Şekil 6. dan görüleceği gibi

$$\cos\phi = \frac{x}{\rho}, \ \sin\phi = \frac{y}{\rho} \ \text{ve} \ \sin\theta = \frac{\rho}{r}$$

$$\cos\phi = \frac{-2}{\sqrt{40}}, \ \sin\phi = \frac{6}{\sqrt{40}}, \ \sin\theta = \frac{\sqrt{40}}{7}$$

hesaplanır. Hesaplanan bu değerler

$$\begin{aligned} \mathrm{A} = (A_r, A_\theta, A_\phi) &= r\left[\sin^2\theta\cos\phi\sin\phi + (\sin\theta\cos\phi + \cos\theta)\sin\theta\sin\phi\right]\mathrm{a}_r \\ &+ r\left[\sin\theta\cos\theta\sin\phi\cos\phi + (\sin\theta\cos\phi + \cos\theta)\cos\theta\sin\phi\right]\mathrm{a}_\theta \\ &+ r\left[-\sin\theta\sin^2\phi + (\sin\theta\cos\phi + \cos\theta)\cos\phi\right]\mathrm{a}_\phi \end{aligned}$$

ifadesinde yerine konulursa

$$\begin{aligned} \mathrm{A} = (A_r, A_\theta, A_\phi) &= 7\left[\frac{40}{49}\frac{-2}{\sqrt{40}}\frac{6}{\sqrt{40}} + \left(\frac{\sqrt{40}}{7}\frac{-2}{\sqrt{40}} + \frac{3}{7}\right)\frac{\sqrt{40}}{7}\frac{6}{\sqrt{40}}\right]\mathrm{a}_r \\ &+ 7\left[\frac{\sqrt{40}}{7}\frac{3}{7}\frac{6}{\sqrt{40}}\frac{-2}{\sqrt{40}} + \left(\frac{\sqrt{40}}{7}\frac{-2}{\sqrt{40}} + \frac{3}{7}\right)\frac{3}{7}\frac{6}{\sqrt{40}}\right]\mathrm{a}_\theta \\ &+ 7\left[\frac{-\sqrt{40}}{7}\frac{36}{40} + \left(\frac{\sqrt{40}}{7}\frac{-2}{\sqrt{40}} + \frac{3}{7}\right)\frac{-2}{\sqrt{40}}\right]\mathrm{a}_\phi \end{aligned}$$

$$\mathrm{A} = (A_r, A_\theta, A_\phi) = \frac{-6}{7}\mathrm{a}_r - \frac{18}{7\sqrt{40}}\mathrm{a}_\theta - \frac{38}{\sqrt{40}}\mathrm{a}_\phi$$

vektörü elde edilir. Verilen vektör Kartezyen, silindirik ve küresel koordinatlarda yazılmış olur. Burada tekrar üç vektörü yazarsak ve boylarını hesaplarsak hepsinin eşit olduğu görebiliriz.

$$\mathrm{A}(A_x, A_y, A_z) = 6\mathrm{a}_x + \mathrm{a}_y$$

$$\mathrm{A}(A_\rho, A_\phi, A_z) = \frac{-6}{\sqrt{40}}\mathrm{a}_\rho - \frac{38}{\sqrt{40}}\mathrm{a}_\phi$$

$$\mathrm{A}(A_r, A_\theta, A_\phi) = \frac{-6}{7}\mathrm{a}_r - \frac{18}{7\sqrt{40}}\mathrm{a}_\theta - \frac{38}{\sqrt{40}}\mathrm{a}_\phi$$

$$|\mathrm{A}| = \left(A_x^2 + A_y^2 + A_z^2\right)^{1/2}$$

$$|\mathrm{A}| = \left(A_\rho^2 + A_\phi^2 + A_z^2\right)^{1/2}$$

$$|\mathrm{A}| = \left(A_r^2 + A_\theta^2 + A_\phi^2\right)^{1/2}$$

$$\left|\mathrm{A}(A_x, A_y, A_z)\right| = \left|\mathrm{A}(A_\rho, A_\phi, A_z)\right| = \left|\mathrm{A}(A_r, A_\theta, A_\phi)\right| = 6.083$$

2) $\mathrm{B} = \dfrac{10}{r}\mathrm{a}_r + r\cos\theta\mathrm{a}_\theta + \mathrm{a}_\phi$ küresel koordinatlarda verilen vektörü kartezyen koordinatlarda yazınız ve B(-3,4,0) noktasında hesaplayınız.

Çözüm:

$$\begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_r \\ B_\theta \\ B_\phi \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{10}{r} \\ r\cos\theta \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$B_x = \frac{10}{r}\sin\theta\cos\phi + r\cos^2\theta\cos\phi - \sin\phi$$

$$B_y = \frac{10}{r}\sin\theta\sin\phi + r\cos^2\theta\cos\phi + \cos\phi$$

$$B_z = \frac{10}{r}\cos\theta - r\cos\theta\sin\theta$$

Aşağıdaki değişkenleri bağıntıda yerlerine yazarsak

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right)$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

ve Şekil 6. dan görüleceği gibi

$$\cos\phi = \frac{x}{\rho},\ \sin\phi = \frac{y}{\rho}\ ,\sin\theta = \frac{\rho}{r},\ \cos\theta = \frac{z}{r}$$

$$\cos\phi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ \sin\phi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\ ,\sin\theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\cos\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

elde edilir. Şimdi bu değişkenler göz önüne alınır B vektörünün bileşenleri tekrar yazılırsa

$$B_x = \frac{10}{r}\sin\theta\cos\phi + r\cos^2\theta\cos\phi - \sin\phi$$

$$B_x = \frac{10}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$B_x = \frac{10x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)} + \frac{z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$B_y = \frac{10}{r}\sin\theta\sin\phi + r\cos^2\theta\sin\phi + \cos\phi$$

$$B_y = \frac{10}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$B_y = \frac{10y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)} + \frac{z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$B_z = \frac{10}{r}\cos\theta - r\cos\theta\sin\theta$$

$$B_z = \frac{10z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)} - \frac{z\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

bütün bileşenler bulunmuş olur.

$\mathrm{B} = B_x\mathrm{a}_\mathrm{x} + B_y\mathrm{a}_\mathrm{y} + B_z\mathrm{a}_\mathrm{z}$ vektörünün (-3,4,0) noktasında aşağıdaki şekilde hesap edilerek B vektörü hesaplanabilir.

$$B_x = \frac{10(-3)}{\left((-3)^2+4^2+0^2\right)} + \frac{0^2}{\sqrt{(-3)^2+4^2+0^2}}\frac{-3}{\sqrt{(-3)^2+4^2}} - \frac{4}{\sqrt{(-3)^2+4^2}}$$

$B_x = -2$ benzer şekilde diğer bileşenlerde $B_y = 1$ ve $B_z = 0$ olarak hesaplanır ve sonuç olarak B vektörü

$$\mathrm{B} = -2\mathrm{a}_{\mathrm{x}} + \mathrm{a}_{\mathrm{y}}$$

şeklinde bulunur.

KAYNAK

Sadiku, M. N. O., 1995, Elements of Electromagnetics, Oxford University Press, 821 sayfa.

http://mathworld.wolfram.com/CylindricalCoordinates.html
http://en.wikipedia.org/wiki/Polar_coordinate_system