

ELEKTROSTATİK (II)

Giriş

Bundan önceki bölümde yük dağılımı bilindiğinde elektrik alanın Coulomb yasası kullanılarak nasıl hesap edileceği üzerine konuştuk. Hatırlayacağınız gibi Coulomb yasasını uygularken integral alınması gerekiyor. Elektrik alan sadece Coulomb yasası kullanılarak hesap edilmez. Gauss yasası kullanılarak ta hesaplanabilir. Gauss yasasını uygulayabilmek için kapalı bir yüzey olması gerekir. Coulomb yasası en genel elektrik alan hesaplama yöntemidir. Gauss yasasında ise ilgilenilen problem simetri özelliği taşıyorsa örneğin silindir, küre vb. gibi, bu durumda Gauss yasasını uygulayarak elektrik alan hesabı Coulomb yasasına göre çok kolaydır.

Diğer bir elektrik alan hesaplama yöntemi potansiyelin türevini almaktır. Coulomb yasası'nda integral almak yerine potansiyelin türevini alarak elektrik alan hesap etmek daha kolaydır.

Akı

Akı bütün vektörlerin ortak özelliğidir. Akı kavramını anlayabilmek için elektrik alandan önce bir akışkana ait akıyı inceleyelim. Şekil 1 deki gibi bir nehir düşünelim. Nehirde su hızını v ile gösterelim, akan suyun içinde üç farklı alan olsun. 1. yüzey suyun akış yönüne tam olarak diktir. Bu durumda kesit alanı ve yüzeyin skaler çarpımı bize akı miktarını verir. Ayrıca bu ifadeyi yoğunlukla çarpmamız gerekir. Bu durumda 1. yüzey için akı

$$\psi_1 = \rho v \cdot a = v \cdot a = va \cos \theta = va \cos 0^\circ = va$$

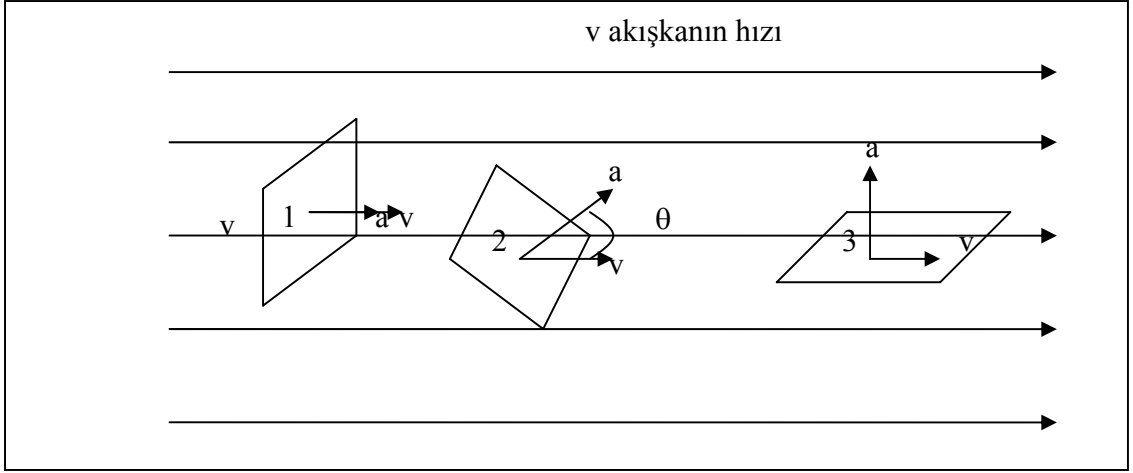
2. yüzey için akı

$$\psi_2 = \rho v \cdot a = v \cdot a = va \cos \theta$$

3. yüzey için

$$\psi_3 = \rho v \cdot a = v \cdot a = va \cos \theta = va \cos 90^\circ = 0$$

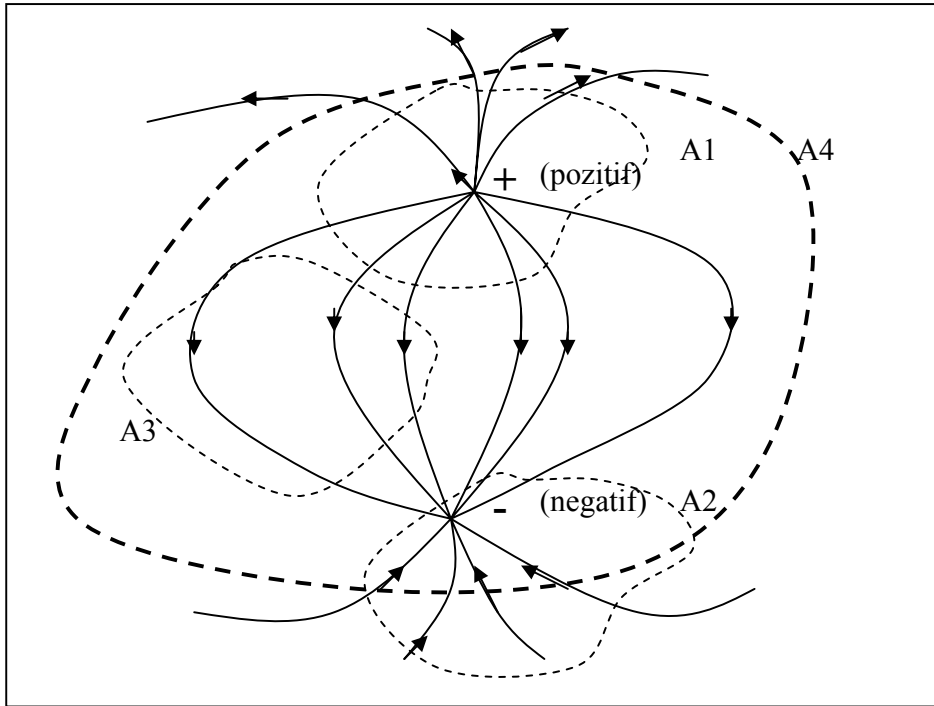
olarak bulunur. 1. yüzey için akı en büyük değerini alırken 3. yüzey için sıfır olmaktadır. Bu açıklamalardan sonra bu düşünceye paralel olarak elektrik alanı düşünebiliriz. Akışkanın akış çizgilerini, elektrik alan kuvvet çizgileri ile yer değiştirirsek incelemenin geri kalan kısmında aynı yöntem uygulanabilir. Burada elektrik alan içinde kapalı yüzeylerle ilgileneceğiz, çünkü Gauss yasası sadece kapalı yüzeylere uygulanabilir.



Şekil 1. Kararlı düzgün sıkıştırılmaz bir akışkan içine yerleştirilmiş üç yüzey.

Elektrik akışı

Elektrik alan çizgileri kapalı bir alana doğru giriyorsa akı negatiftir. Kapalı alandan çıkıyorsa akı pozitifdir. Şekil 2 de verilen eşit pozitif ve negatif yüklerden dolayı oluşan elektrik alan çizgileri içerisinde dört farklı yüzey gösterilmiştir. Bu yüzeyler için akılar şu şekildedir: A1 yüzeyi için akı pozitif, A2 yüzeyi için negatif, A3 ve A4 yüzeyleri için akı sıfırdır. A3 ve A4 yüzeylerinde akı sıfır olmasına karşın farklı durumlarıdır. A3 de yüzey içinde yük yoktur, fakat A4 yüzeyinin içinde toplam yük sıfırdır. Eğer yükler eşit olmasaydı A4 yüzeyi için akı sıfırdan farklı değer olacaktı.



Şekil 2. İki eşit ters işaretli yüklerden dolayı oluşan elektrik alan çizgileri.

Gauss Yasası

Gauss yasası, Coulomb yasasının bir başka şekilde ifade edilmişidir. Elektromanyetizmanın temel yasalarından biri olan Gauss yasası elektrik akısı ile ifade edilir.

Elektrik alan formülü permitivite sabitine bağlı olarak yazılır. Permitivite sabiti ortama bağlı bir değerdir. Boşluktan farklı durumlarda farklı değer alır. Pratik olsun diye yeni bir D vektörü tanımlanır. Bu vektör izleyen şekilde

$$D = \epsilon_0 E \quad (1)$$

yazılır. Burada E elektrik alan ve ϵ_0 permitivite sabitidir. D ye elektrik akı yoğunluğu denir. Birimi coulombs / alan $\left(\frac{C}{m^2}\right)$ dir. Elektrik akısı D cinsinden

hesaplanabilir. **Gauss yasasına** göre herhangi bir kapalı yüzey boyunca toplam elektrik akı, bu kapalı yüzeyin oluşturduğu hacim içindeki toplam yüke eşittir.

$$\begin{aligned} \psi &= Q_{\text{kapalı_alan}} \\ \psi &= \oint_S d\psi = \oint_S D \cdot dS \\ \text{toplam yük } Q &= \int_V \rho_v dv \end{aligned}$$

Gauss yasasının integral biçimi

$$\boxed{Q = \oint_S D \cdot dS = \int_V \rho_v dv} \quad (2)$$

şeklinde dir. Hatırlanacağı gibi daha önceki derslerde alan integralini hacme eşitleyen integrale diverjans teoremi adı altında görmüştük. Bu ifadeye göre Gauss yasası ve diverjans teoremleri aynıdır. Diverjans teoreminden bildiğimiz gibi (2) ifadesi türev formülleri şeklinde de

$$\begin{aligned} \oint_S D \cdot dS &= \int_V \nabla \cdot D dv \\ \boxed{\rho_v = \nabla \cdot D} & \quad (3) \end{aligned}$$

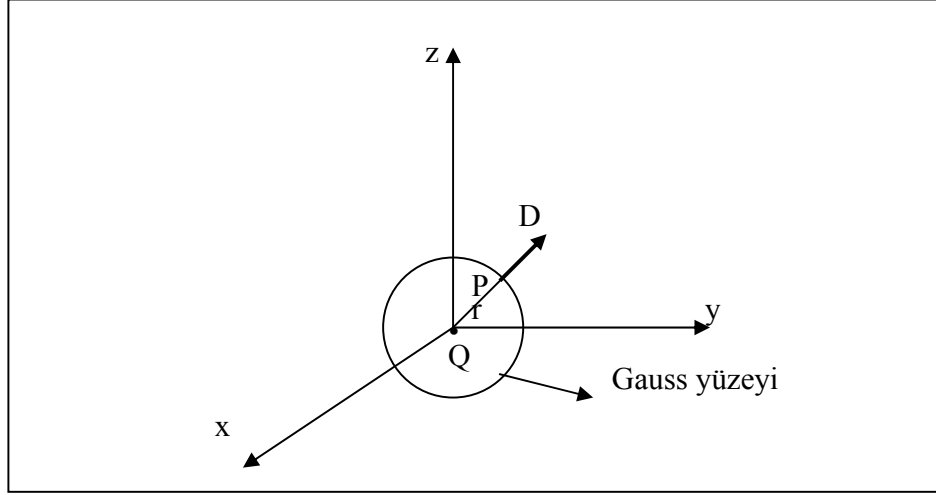
yazılabilir. (2) veya (3) denklemleri dört Maxwell denklemlerinden sadece birisidir.

Gauss Yasası Uygulamaları

Gauss yasası'nı kapalı yüzeylere uygulanmasını örneklerle görelim. Sırasıyla ilk önce nokta yük, çizgisel yük, alansal yük ve hacimsel yük yoğunlukları hesaplanacaktır.

Nokta yük

Nokta yük kaynağına Gauss yasasını uygulayalım. Şekil 3 deki gibi bir nokta kaynağı orijinde bulunsun. D vektörünü P noktasında hesaplayalım. Burada Gauss yüzeyi küre yüzeyi olup P noktasında r yarıçaplı kürenin yüzeyinde yer almaktadır.



Şekil 3. Nokta yük kaynağı ve Gauss yüzeyi.

(2) denklemini kullanarak ve S küre yüzeyinin alanı yerine yazılırsa

$$Q = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D_r \oint dS = D_r 4\pi r^2$$

elde edilir. İşlemlere devam edilir ve $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ olduğu hatırlanırsa P noktasındaki elektrik alan

$$D_r = \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{a}_r \Rightarrow \mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{a}_r \quad (4)$$

$$\mathbf{E}_r = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r \Rightarrow \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r \quad (5)$$

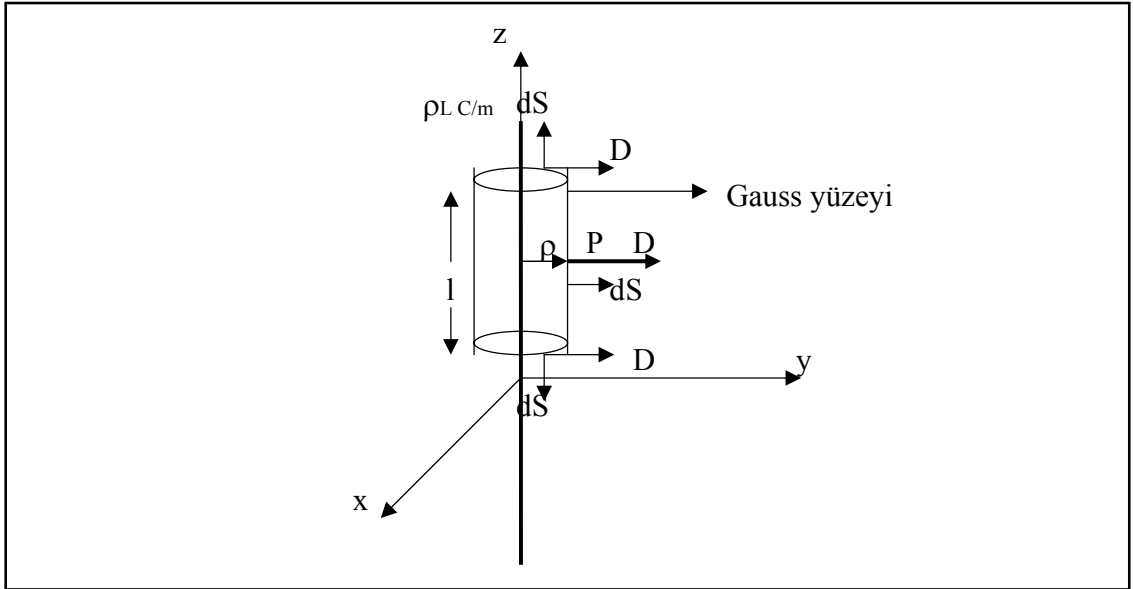
şeklinde yazılır. Hatırlayacağınız gibi (5) denklemini Coulomb yasası kullanarak yazmıştık. Bu bağıntı Gauss yasası uygulanarak ta yazılabileceğini gördük.

Küre yüzeyi $4\pi r^2$ de $\oint dS = r^2 \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta d\theta$ integrali alınarak ta bulunabilir.

Bu bağıntıyı daha önceki derslerimizde küresel koordinatlarda alan elemanı olarak görmüştük.

Tek düze (homojen) sonsuz çizgi yük

Şekil 4 deki gibi z ekseni boyunca uzanan sonsuz uzunluktaki tek düze (homojen) yük yoğunluğu olan telin P noktasında oluşturacağı elektrik alanı hesaplayalım. Bu durumda problem için Gauss yüzeyi Şekil 4 deki gibi bir silindir olabilir. Bu durumda Gauss yasası'nı aşağıdaki biçimde uygulayabiliriz.



Şekil 4. Sonsuz uzunlukta tek düze çizgisel yük yoğunluğu.

$$Q = \rho_L l = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D_\rho \oint dS = D_\rho 2\pi\rho l$$

$$D_\rho = \frac{\rho_L l}{2\pi\rho l} a_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\rho} a_\rho$$

$$\mathbf{D} = \frac{\rho_L}{2\pi\rho} a_\rho \quad (6)$$

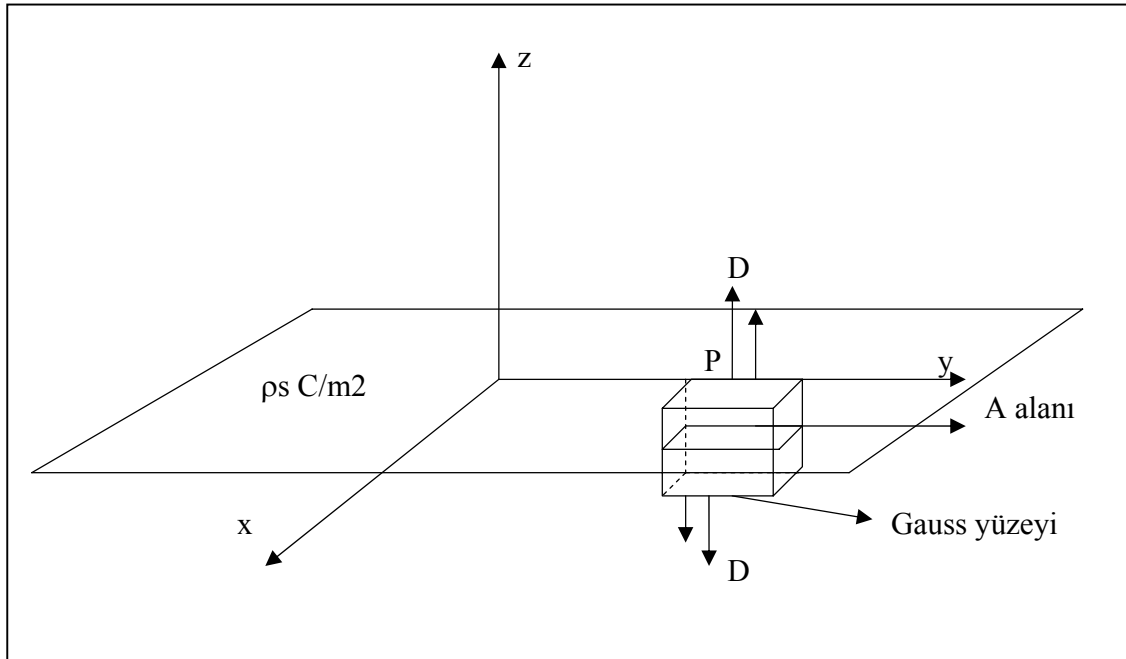
$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho} a_\rho \quad (7)$$

Silindirin yan yüzlerinden E veya D ye bir katkı yoktur. Z bileşen sıfırdır. D vektörü ve yüzey normalleri arasında 90 derecelik açı vardır. Skaler çarpımdan dolayı silindirin alt ve üst tabanlarından D veya E ye bir katkı yoktur.

Hatırlayacağınız gibi, (7) ifadesini Coulomb yasası'yla hesap etmiştik ve işlemler çok uzundu ve integral almamız gerekmişti. Aynı problem Gauss yasası uygulanarak basit bir şekilde hesap edildi.

Tek düze (homojen) sonsuz levha yük

Daha önce Coulomb yasası ile çözdüğümüz diğer bir örnek levha şeklinde bir homojen yük yoğunluğuydu. Burada sadece düzgün levha bulunmakta ve bu nedenle düzgün bir elektrik alan vardır. Önceki iki örneğe benzer şekilde uygun Gauss yüzeyi seçelim ve problemi çözmeye çalışalım. Şekil 5 de göre problemin gösterilmiştir.



Şekil 5. Sonsuz levha düzgün yük $z=0$ düzleminde uzanmaktadır.

$$Q = \rho_s A = \oint D \cdot dS = D_z \left(\int_{alt} dS + \int_{üst} dS \right)$$

$$\rho_s A = D_z (A + A)$$

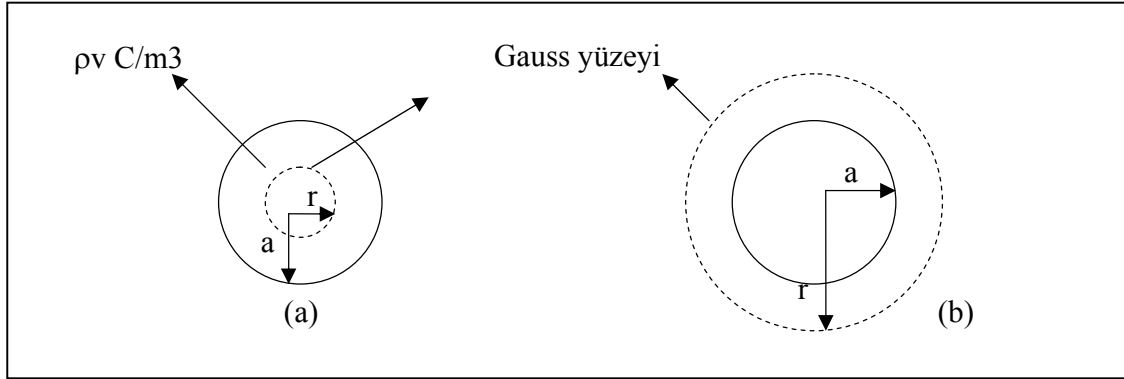
$$D_z = \frac{\rho_s}{2} a_z$$

$$D = \frac{\rho_s}{2} a_z$$

$$E = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} a_z$$

Homojen yüklü küre

Şekil 6 da ki gibi homojen yüklü küre düşünelim. Bu kürenin içinde ve küre dışında elektrik alanı Gauss yasası yardımıyla hesaplayalım.



Şekil 6. Homojen yüklü küre.(a) Gauss yüzeyi küre içinde (b) Gauss yüzeyi küre dışında.

İlk önce Şekil 6 (a) ki durumu inceleyelim. Bu durumda $r \leq a$ dır. Bu durumda toplam yük kürenin hacmiyle yük yoğunluğunun çarpımına eşittir. Toplam yük

$$Q = \int \rho_v dv = \rho_v \int dv = \rho_v \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^a r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = \rho_v \frac{4}{3} \pi a^3 \quad (8)$$

şeklinde bulunur. Akı ise

$$\Psi = \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D_r \oint dS = D_r \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} r^2 \sin \theta d\theta d\phi = D_r 4\pi r^2 \quad (9)$$

biçiminde bulunur. Gauss yasası gereği yüzeyden geçen toplam akı, kapalı yüzey içindeki toplam yüke eşit olduğundan (8) ve (9) ifadeleri birbirlerine eşitlenerek

$$\begin{aligned} Q &= \Psi \\ \rho_v \frac{4}{3} \pi a^3 &= D_r 4\pi r^2 \\ D_r &= \frac{r}{3} \rho_v \\ D &= \frac{r}{3} \rho_v a_r \quad 0 < r \leq a \end{aligned}$$

Elektromanyetik Teori Bahar 2005-2006 Dönemi

veya

$$E = \frac{r}{3\epsilon_0} \rho_v \mathbf{a}_r \quad 0 < r \leq a \quad (10)$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde $r \geq a$ için elektrik alanı hesaplayalım.

$$Q = \int \rho_v dv = \rho_v \int dv = \rho_v \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^a r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = \rho_v \frac{4}{3} \pi a^3$$
$$\psi = \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D_r \oint dS = D_r \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} r^2 \sin \theta d\theta d\phi = D_r 4\pi r^2$$

Yük ve akıyı birbirlerine eşitleyelim, bu durumda

$$Q = \psi$$

$$\rho_v \frac{4}{3} \pi a^3 = D_r 4\pi r^2$$

$$D_r = \frac{a^3}{3r^2} \rho_v$$

$$\mathbf{D} = \frac{a^3}{3r^2} \rho_v \mathbf{a}_r \quad r \geq a$$

$$E = \frac{a^3}{3\epsilon_0 r^2} \rho_v \mathbf{a}_r \quad r \geq a \quad (11)$$

olarak bulunur. Şimdi bu sonuçlara sayısal bir örnek vererek elektrik alanının değişimine bakalım.

Sayısal örnek:

(10) ve (11) bağıntılarını kullanarak elektrik alanı küre içinde ve dışında hesap ediniz ve grafiğini çiziniz? ($a=10$ m, $r=0-100$ m, $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ F/m,

$$\rho_v = 1.3 \times 10^{-9} \text{ C/m}^3$$

çözüm:

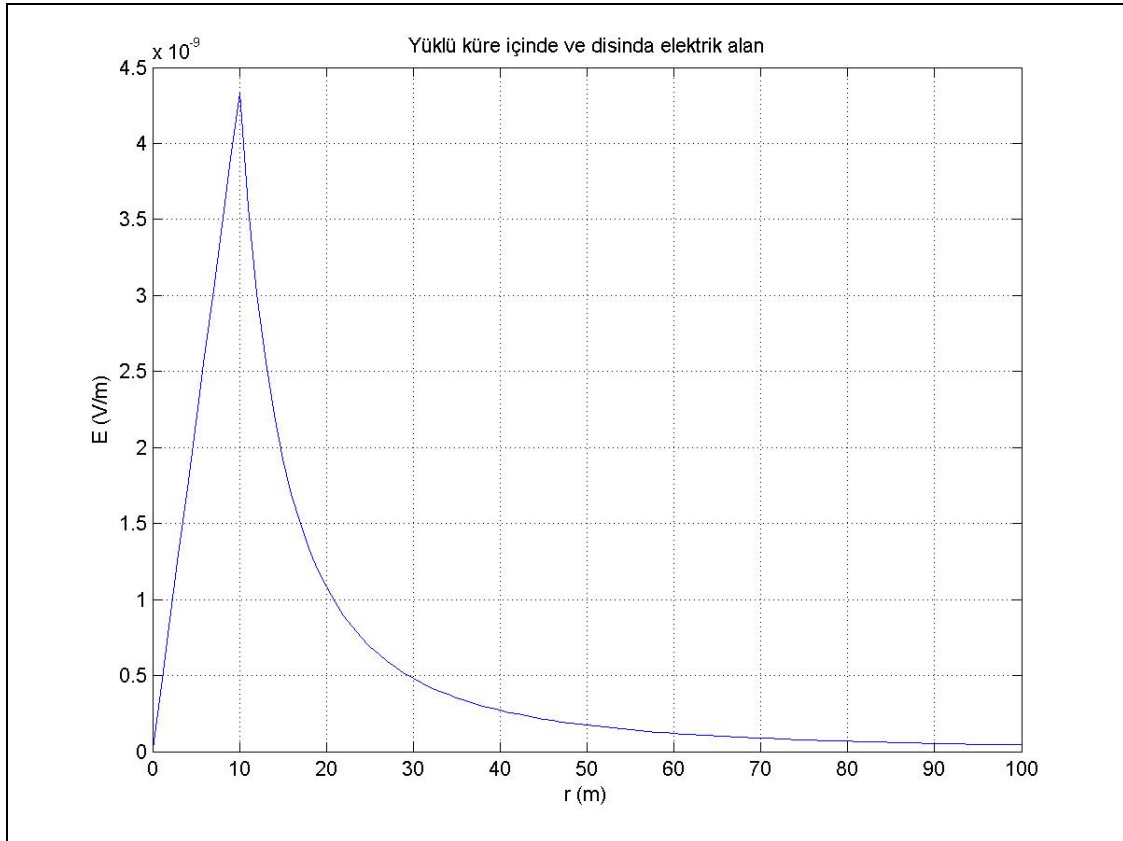
$$E = \frac{r}{3\epsilon_0} \rho_v \mathbf{a}_r \quad 0 < r \leq a$$

Elektromanyetik Teori Bahar 2005-2006 Dönemi

$$E = \frac{a^3}{3\epsilon_0 r^2} \rho_v a_r \quad r \geq a$$

bağıntıları kullanarak problem çözülebilir. Bunun için aşağıdaki Matlab programı kullanılabilir. Program elektrik alanın r ye bağlı değişim grafiğini vermektedir.

```
close all
clear all
epsilon_0=8.854e-12;
a=input('a değerini giriniz')
r=0:1:100;
rho_v=1.3e-9;
[n,m]=size(r);
for ii=1:m
if r(ii) >= a
E(ii)=(a*a*a*rho_v)/(3*r(ii)*r(ii));
else
E(ii)=(r(ii)*rho_v)/(3);
end
end
plot(r,E)
title('Yüklü küre içinde ve dışında elektrik alan')
xlabel('r (m)')
ylabel('E (V/m)')
grid
```



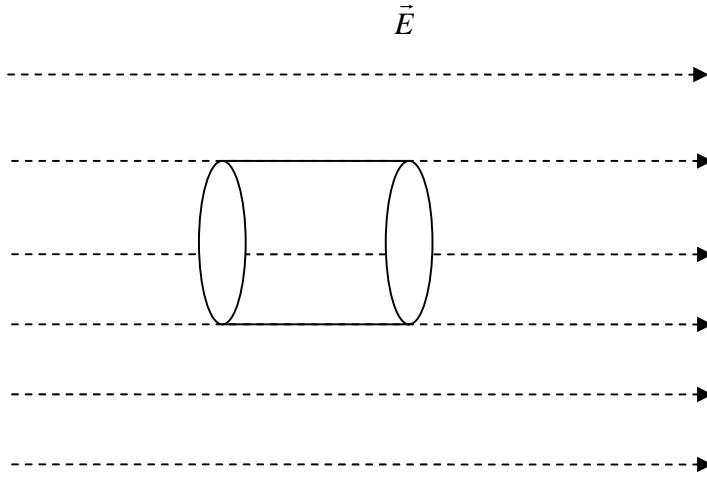
Şekil 7. Küre merkezinden belirli bir uzaklığa kadar elektrik alanın değişimi .

Elektromanyetik Teori Bahar 2005-2006 Dönemi

Şekil 7 den anlaşılacağı üzere elektrik alan kürenin merkezinden yüzeyine kadar doğrusal olarak artmakta hemen kürenin dışında elektrik alan üstel olarak azalmaktadır. Kürenin yarıçapı 10 m dir.

Ödev

Şekil 8. deki gibi düzgün bir elektrik alan içerisinde silindir biçiminde bir kapalı yüzey verilmiştir. (Elektrik alanın yönü soldan sağa doğru şekilde gösterildiği gibidir.). Silindirin eksenini ile elektrik alan aynı doğrultuda verilmiştir. Kapalı yüzeyden geçen toplam akıyı hesap ediniz ?



Şekil 8. Düzgün bir elektrik alan içinde silindir biçiminde kapalı Gauss yüzeyi.

KAYNAK

Edminister, Joseph A., 1993, Electromagnetics, Schaum's outlines

Sadiku, M. N. O., 1995, Elements of Electromagnetics, Oxford University Press, 821 sayfa.